

I. Nombres complexes :

1° Déterminer les triplets $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ en progression géométrique vérifiant les conditions :

$$z_1 z_2 z_3 = 4 + 4i\sqrt{3} \quad ; \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

2°. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe :

$$u = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i(\sqrt{2} - 1)} \right) . \text{ Calculer } u^{1984}$$

N.B. : 1° et 2° indépendants.

II. Etude de fonctions.

1°. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x| + \ln|x+2|$

a) Etudier f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

b) Dériver : $G(x) = ax^2 + bx + (x+2) \ln|x+2|$, en déduire les primitives de f sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

c) Soit (E) : $e^{k-1|x|} - 2 - x = 0$.

Déterminer une valeur approchée de k pour que $x = 6$ soit solution de (E). Retrouver graphiquement, suivant les valeurs de k , le nombre d'éléments de l'ensemble des solutions de (E).

2°. Soit f_m la fonction définie par : $f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{x} - m \ln x$.

a) Donner le domaine de définition de f_m et discuter selon les valeurs de m le sens de variation de f_m . (Utiliser des tableaux de variations pour préciser les résultats obtenus). On remarquera que toutes les courbes (C_m) représentatives des fonctions f_m passent par un point fixe A .

b) Construire (C_0) et (C_2) dans un même repère.

III. Sujet d'étude :

Déterminer toutes les fonctions de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$(a) \quad \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad f(xf(y)) = yf(x)$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(d'après la XXIV^{ème} olympiade de Maths qui elle s'est déroulée à Paris en 1983...)