

Calcul des différences : dans tout le problème, on considère des suites (a_n) de nombres réels ou complexes; on définit: $Da_n = a_{n+1} - a_n$ (différence discrète)
 $I_n a_n = \sum_{j=n_0}^n a_j$ (intégration discrète).

I. 1°) Calculer $D^2 a_n = D(Da_n)$. Montrer par récurrence sur k que:

$$D^k a_n = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j a_{n+j} = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i a_{n+k-i}.$$

2°) a) A la fonction $f(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), on associe la suite

$$f_{n,k} = n(n+1)\dots(n+k-1). \text{ Calculer } Df_{n,k}; \text{ montrer que } I_0 f_{n,k} = \frac{1}{k+1} n(n+1)\dots(n+k).$$

b) Procéder de même avec la suite $g_{n,\theta} = r^n$ ($r \in \mathbb{C}$). Cas particulier $r = e^{i\theta}$; donner une valeur simplifiée de $I_0 c_{n,\theta} = \frac{1}{2}$ où $c_{n,\theta} = \cos(n\theta)$.

II. Résolution de quelques équations aux différences d'ordre 1

1°) a) Résoudre les équations: $Da_n = 0$, $Da_n = f_{n,k}$, $Da_n = g_{n,\theta}$; — plus généralement, $Da_n = b_n$ où b_n est une suite quelconque.

b) Résoudre: $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ ($|a_0| < 1$, $a_0 \in \mathbb{R}$) (poser $a_0 = \cos \theta$).

2°) On considère la suite: $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$, $\alpha \neq 1$. (1)

a) Montrer que (1) $\Leftrightarrow Da_n = (\alpha - 1)a_n + \beta$ (2)

b) On va procéder de la même façon que pour les équations différentielles $y' = ay + b$: on cherche une solution particulière et on résout: $y' = ay$.

i). Trouver une solution particulière de (2); ii) résoudre $Da_n = (\alpha - 1)a_n$.

iii) en déduire l'ensemble des solutions de (1).

3°) On veut généraliser les résultats du II. 2°: $a_{n+1} = p(n)a_n + q(n)$ (3) où $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ et $q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ sont 2 fonctions données.

a) On pose $S_n = \prod_{j=1}^{n-1} p(j)$, $n \geq 1$ et $S_0 = 1$. Résoudre $a_{n+1} = p(n)a_n$ en utilisant S_n .

b) Soit $b_n = a_n / S_n$, calculer Db_n ; en déduire l'expression de a_n : $a_n = S_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} (q(k) / S_{k+1}) + a_1 \right)$ ($n \geq 2$).

c) Applications:

i) résoudre: $a_{n+1} = na_n / (n+1) + n$.

ii) soit: $a_{n+1} = na_n / (n+1) + (n-1) / [(n+1)^2(n+2)(n+3)]$; calculer a_1 puis exprimer a_n en fonction de n (résultat très simple).

III. Résolution d'équations aux différences d'ordre 2:

1°) Résoudre $D^2 a_n = 0$ (poser $b_n = Da_n$). Si $a_0 > 0$, en déduire les solutions de $a_{n+2} = a_{n+1}^2 / a_n$; étudier le cas $a_0 < 0$.

2°) On veut résoudre les équations de la forme: $\alpha a_n + \beta a_{n+1} + \gamma a_{n+2} = 0$ (4)

a) Montrer que (4) peut se mettre sous la forme:

$$\lambda D^2 a_n + \mu Da_n + \nu a_n = 0 \quad (5) \quad (\text{On donnera les valeurs de } \lambda, \mu, \nu \text{ en fonction de } \alpha, \beta, \gamma)$$