

de α, β, γ

b) De même, on peut procéder comme avec les équations différentielles linéaires du 2^e ordre: écrire l'équation vérifiée par $x-1$ si $g_{n,x}$ est solution de (5).

c). En fait, il est plus simple de considérer directement l'équation (4): on obtient la résolvante: $\gamma r^2 + \beta r + \alpha = 0$. (6);

si (6) admet 2 racines distinctes r_1 et r_2 , montrer que l'ensemble des solutions de (4) est donné par $a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

si (6) admet 1 racine double r , montrer que $b_n = n r^n$ vérifie (4); en déduire dans ce cas l'ensemble des solutions de (4).

d). Applications:

i) suite de Fibonacci: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$: donner l'expression de a_n en fonction de n .

ii) trouver a_n en fonction de n si: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0$.

iii) même question avec: $a_0 = 1$, $a_1 = \cos \theta$ et $a_{n+2} = 2 \cos \theta a_{n+1} - a_n$.

3°. Généralisation: soit: $a_{n+2} + p(n)a_{n+1} + q(n)a_n = 0$ (7).

a) Si (a_n) et (b_n) sont 2 solutions de (7), on pose: $W_n = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{vmatrix} = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$.
Trouver une relation entre W_{n+1} et W_n ; donner l'expression de W_n en fonction de: $Q_n = \prod_{j=0}^{n-1} q(j)$, de a_0, b_0, a_1, b_1 ($n \geq 2$).

b) Si a_n est une solution de (7), on cherche une deuxième solution de (7) sous la forme: $b_n = x_n a_n$; donner la relation entre Dx_n et Dx_{n+1} permettant de trouver l'expression de x_n .

c) Applications: résoudre:

i) $2n a_{n+2} + (n^2 + 1) a_{n+1} - (n+1)^2 a_n = 0$ (on connaît la solution: $a_n = 1 \forall n$)

ii) $n^2 a_{n+2} - n(n+1) a_{n+1} + a_n = 0$ (: $a_n = n$).

N.B.: il est vivement recommandé de faire ce 1^{er} devoir seul, en soignant la rédaction. On demande en particulier de bien rédiger le I, le II. 2° et le III. 3°.