

III

f involutive : ?

$$f(x f(y)) = y f(x) \text{ et } f(y f(x)) = x f(y)$$

$$\Rightarrow f \circ f(x f(y)) = x f(y)$$

$$\text{si } f = 0 \quad \text{OK ou } f > 0.$$

$$\text{si } f \neq 0 \Rightarrow f \text{ involutive.}$$

$$f(1) \stackrel{?}{=} 1. \quad f(1) \neq 0 \text{ ou } f(x f(1)) = f(x)$$

$$a = f(1) \quad f(a^2) = f(a f(1)) = f(a) = a \quad \Leftrightarrow x f(1) = x \quad \Leftrightarrow f(1) = 1$$

$$\text{et par récurrence : } f(a^n) = a.$$

$$f\left(\frac{1}{a} \cdot f(1)\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = a$$

$$\text{et par récurrence : } \forall n \in \mathbb{Z} : f(a^n) = a.$$

$$a > 1 : \text{contradiction avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n) = 0$$

$$a < 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{a^n}\right) = 0$$

$$\text{Conclusion : } f(a) = 1$$

$$x f(x) \stackrel{?}{=} 1$$

$$x f(x) = y \Rightarrow f(y) = y$$

$$f(y f(y)) = y f(y) = y^2 = f(y^2)$$

$$\text{par récurrence : } f(y^n) = y^n \quad n > 0$$

$$f\left(\frac{1}{y} f(y)\right) = y f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\text{par récurrence : } f(y^n) = y^n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{si } b \neq 1 : \text{contradiction.}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Conclusion : } \cancel{f(x) = 0} \text{ ou } f(x) = \frac{1}{x}.$$