

Correction du devoir :

I. 1°) On a : $x^2 - 2\lambda x + \mu = 0$ (cette équation possède 2 racines $\neq 0$ car $\lambda^2 > \mu$).

$$\text{Or : } y'_g(a) = \frac{(2a-2\lambda)(b^2-1) - (a^2-2\lambda a+\mu)2a}{(a^2-b^2)^2} = 2 \cdot \frac{a-\lambda}{a^2-1}$$

Les tangentes en A et B sont parallèles car : $f'(a) = f'(b) \Leftrightarrow \frac{a-\lambda}{a^2-1} = \frac{b-\lambda}{b^2-1} \Leftrightarrow \frac{a+b-2\lambda}{a^2+b^2-2} = 0$

$$\text{Or : } a+b-2\lambda=0 \Rightarrow a^2+b^2=2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 2 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 2\lambda^2 - 1} \quad (a+b=2\lambda, ab=\mu)$$

La condition : $\lambda^2 > \mu \Leftrightarrow \lambda^2 < 1$; de plus, il faut $a^2 - 1 \neq 0$ donc $a \neq \pm 1$.

Donc on a : $\boxed{\lambda \in]-1, 0[\cup]0, +1[}$.

$$\text{Extrémums de } f : y'_g = \frac{2\lambda(x^2-2\lambda x+1)}{(x^2-1)^2}$$

Or : $\lambda^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 2\lambda x + 1 > 0$, donc si $\lambda > 0$ on a :

De même si $\lambda < 0$, donc f ne présente ni maximum, ni minimum.

$$2^\circ / \text{Pente de la tangente en A et B : } 2 \cdot \frac{a-\lambda}{a^2-1} = 2 \cdot \frac{b-\lambda}{b^2-1} = \frac{2(a+b)}{a^2+b^2} = \frac{2}{a+b} = \frac{1}{\lambda} \quad (a+b=2\lambda)$$

$$\text{Recherche de A' et B' : il faut : } \frac{2\lambda(x^2-2\lambda x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2(1+\lambda^2)x^2 + 4\lambda^2 x + 1 - 2\lambda^2 = 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \quad (A)$$

Or, on connaît 2 solutions de (A) : a et b donc :

$$(A) \Leftrightarrow (x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 - 1)(x^2 + 2\lambda x - 1) = 0 \Rightarrow a' \text{ et } b' \text{ vérifient : } x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$$

$$\text{En remplaçant } a'^2 - 1 \text{ par } -2\lambda a', \text{ on a : } y_{a'} = \frac{-4\lambda a' + 2\lambda^2}{-2\lambda a'} = 2 - \frac{\lambda}{a'}$$

$$\text{Pente de la droite } A'B' : \frac{y_{a'} - y_{b'}}{a' - b'} = \frac{2 - \frac{\lambda}{a'} - (2 - \frac{\lambda}{b'})}{a' - b'} = -\frac{\lambda}{ab} \quad (\text{car } ab = -1)$$

$$\text{Or : } -\lambda \times \frac{1}{\lambda} = -1 \text{ donc la droite } A'B' \text{ est } \perp \text{ à } \vec{OS}.$$

II. Il faut que : $\cos x \neq 0$ et $\sin 3x \neq 0$ d. z. : $x \neq \frac{2k\pi}{3}$ et $x \neq \frac{2k\pi}{5}$; $x \neq \frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Dans ce cas on a : } \sin x + 2 \sin 2x - 5 \sin 5x = 2 \cos x \sin 3x - 2 \cos 4x \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 7x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 7x = \sin 4x + \sin 5x \Leftrightarrow \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \text{ et } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{solutions } [2\pi] : \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}$$

III. $\mathcal{D}_f =]-1, +1[$; f étant impaire, on l'étudie sur $[0, 1[$.

$f'(x) = 2x \cdot g(x)$ donc f' est du signe de $g(x)$.

$$g'(x) = + \frac{x^2+1}{x^2(1-x^2)} > 0 \quad a_0 \approx 0,64791223$$

$$f(x_0) \approx -0,8954864$$

$$f'(0) = 2$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$$

