

Problème :

Venchev 14/7/79

A) Pour tout réel a , on considère l'application f_a , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f_a(0) = 0$ et $f_a(t) = |t|^a \sin t \sin(1/t)$, pour $t \neq 0$.

1. f_a est-elle continue en un point de $\mathbb{R}^*$? Est-elle différentiable en un tel point ? Expliciter f'_a sur $\mathbb{R}^*$.

2. a) On considère les suites : $u_{a,n} = f_a\left(\frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}\right)$, $v_{a,n} = f_a\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Etudier leurs convergences. Préciser leurs limites lorsque celles-ci existent.

b) f_a est-elle continue au point 0 ?

3. f_a est-elle différentiable au point 0 ?

4. Lorsque f_a est différentiable au point 0, sa dérivée f'_a est-elle continue au point 0 ?

5. Dans l'hypothèse $a > -1$, on considère la suite : $w_{a,n} = \sum_{k=1}^n \frac{k^a}{n^{a+1}} \sin(k/n) \sin(n/k)$.

Etudier la convergence de cette suite.

B) 1) Existe-t-il une application continue g , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$(\forall t \in \mathbb{R}^*), (g(t) = \cos t \cos(1/t)) ?$$

2. On considère l'application b , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$b(0) = 0 \text{ et } b(t) = \cos t \cos(1/t), \text{ si } t \in \mathbb{R}^*,$$

et l'application B , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $B(x) = \int_x^1 b(t) dt$.

Soit h l'application, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$h(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^2} \sin t \sin \frac{1}{t} dt.$$

En utilisant, éventuellement une intégration par

parties, indiquer une expression simple, pour $x > 0$, de $h(x) + B(x)$.

3. Montrer qu'il existe une application continue $\tilde{h}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), (\tilde{h}(x) = h(x))$.

C) 1. Soit l'application : $H(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \sin t \sin(1/t) dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} \sin t \sin(1/t) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que H est constante.

2. f est ici une notation abrégée de la fonction notée f_0 en A.

Montrer que l'application F , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. F admet-elle une limite en $-\infty$?

D) Soit c, s et r les applications, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$c(0) = s(0) = r(0) = 0 \text{ et si } t \in \mathbb{R}^* \quad c(t) = \cos(1/t), \quad s(t) = 2t \sin(1/t) \\ r(t) = t^2 \sin(1/t).$$

1. Montrer que l'application d de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$d(x) = r(x) - \int_0^x s(t) dt + \int_0^x c(t) dt, \text{ est continue.}$$

Est-elle différentiable ?

2. L'application C , de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $C(x) = \int_0^x c(t) dt$ et l'application F définie en B)2 sont-elles différentiables au point 0 ?

3. L'application $\tilde{h}$ définie en B)3 est-elle différentiable au point 0 ?