

Devoir à la maison. Vendredi 26/11/82

Problème. résolution des équations du 3<sup>o</sup> et du 4<sup>o</sup> degré

I. Equation du 3<sup>o</sup> degré

1<sup>o</sup> Soit  $E(x, y, z) = (x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4})^3 : (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ . Montrer que lorsqu'on permute de toutes les façons  $x, y$  et  $z$ , on n'obtient que 2 valeurs possibles pour  $E$ : A et B. A quelle condition a-t-on  $A = B$ ?

2<sup>o</sup> Soit  $x^3 + px + q = 0$  (1) et  $x_1, x_2, x_3$  ses racines  $(p, q) \in \mathbb{C}^2$

a) Calculer en fonction de  $p$  et  $q$ :  $s_1 = \sum x_i, s_2 = \sum x_i x_j, s_3 = x_1 x_2 x_3$  puis  $S_2 = \sum x_i^2, S_3 = \sum x_i^3, S_{2,1} = \sum x_i^2 x_j$ .

b) En supposant  $x, y, z$  racines de (1) former l'équation du 2<sup>o</sup> degré admettant A et B comme racines. En déduire les formules permettant de résoudre

3<sup>o</sup> En appliquant les résultats précédents, calculer à l'aide de radicaux la racine réelle de  $x^3 + 3x + 2 = 0$ . (1)

4<sup>o</sup> Résolution trigonométrique:  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  et  $4p^3 + 27q^2 < 0$ .

Démontrer qu'il existe  $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$  tels que les racines de (1) soient:

$\lambda \cos \alpha, \lambda \cos(\alpha + 2\pi/3), \lambda \cos(\alpha + 4\pi/3)$ ; calculer  $\lambda$  et  $\cos 3\alpha$  en fonction de  $p$  et  $q$ . En utilisant cette méthode: résoudre:  $x^3 - 4x + 1 = 0$ .

II. Equation du 4<sup>o</sup> degré:  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx = 0$  (2)

1<sup>o</sup> Soit  $q(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx = (x^2 + \lambda)^2$ ; chercher une CNS sur  $\lambda$  pour que  $q$  soit un carré. En déduire que la résolution d'une équation du 4<sup>o</sup> degré (2) se ramène à la résolution d'une équation du 3<sup>o</sup> degré et de 2 équations du 1<sup>er</sup> degré.

Résoudre:  $x^4 + 3x^3 - 2x + 2 = 0$ . (3)

2<sup>o</sup> Soient  $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$  les racines de (2), montrer que,  $\sigma$  étant une permutation de  $S_4$ ,  $y_\sigma = d_{\sigma_1} d_{\sigma_2} + d_{\sigma_3} d_{\sigma_4}$  ne prend que 3 valeurs. Former l'équation du 3<sup>o</sup> degré  $f(y) = 0$  ayant ces 3 valeurs pour racines.  $\beta$  étant une racine de cette équation,  $\beta = d_1 d_2 + d_3 d_4$ , montrer que l'on peut résoudre (2). Résoudre alors par cette méthode l'équation (3).

Exercice de topologie:

Soit  $O$  un ouvert de  $(E, d)$  et  $K$  un compact inclus dans  $O$ . Montrer que l'on peut recouvrir  $K$  au moyen d'un nombre fini de boules ouvertes  $B(x_i, r_i)$  centrées en des points  $x_i$  de  $K$  et telles que les boules  $B(x_i, 2r_i)$  soient contenues dans  $O$ .

En déduire qu'il existe un nombre  $r > 0$  tel que,  $\forall x \in K$ , la boule  $B(x, r)$  soit contenue dans  $O$ .