

Exercice I :

On désigne par z_1 le nombre complexe $1 - i$.

1°) Calculer z_1^3 ; donner alors les racines cubiques de $-2(1+i)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice II :

E est le plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par : $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout a réel, on désigne par E_a l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = a\vec{u}$.

1°) Montrer que si a est différent de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{4}$, E_a est égal à $\{0\}$.

2°) Montrer que $E_{1/2}$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{I} = -2\vec{i} + \vec{j}$ et que $E_{1/4}$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{J} = -3\vec{i} + \vec{j}$.

Que penser de la famille $(\vec{I}, \vec{J})$?

3°) On définit une suite de vecteurs par : $\vec{u}_0 = -5\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{u}_{n+1} = f(\vec{u}_n)$.

Exprimer $\vec{u}_n$ en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$, puis de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Problème :

I - 1°) Comment choisir les constantes réelles a, b, c pour que le polynôme $P : x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation :

$$xP'(x) - 2P(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel ?}$$

2°) Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)/x^2$. Montrer que f vérifie, pour tout x réel strictement positif $xf'(x) - 2f(x) = \text{Log} x$ (1) si et seulement si g est une primitive de la fonction $x \mapsto (\text{Log} x)/x^3$.

3°) Donner alors l'ensemble des solutions de (1).

4°) On appelle h la solution de (1) qui vérifie $h'(1) = 0$. Etudier les variations de h et construire sa représentation graphique.

II - 1°) Si a est un réel strictement positif, calculer : $I(a) = \int_0^1 h(x) dx$.

2°) Déterminer la limite de $I(a)$ quand a tend vers 0.

3°) Si n est un entier ≥ 2 , k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$ et $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a : $h\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq h(x) \leq h\left(\frac{k}{n}\right)$, puis : $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n h\left(\frac{k}{n}\right) < I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$; en déduire : $I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(k/n) < (1/n)h(1/n) + I(1/n)$.

4°) En déduire que, lorsque n tend vers l'infini, $(1/n) \sum_{k=1}^n h(k/n)$ admet une limite ; la calculer.

5°) a) Montrer que : $(1/n) \sum_{k=1}^n h(k/n) = (1/4n^3) \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (1/2n) \left(\sum_{k=1}^n \text{Log} \frac{n}{k} \right) - \frac{1}{4}$.

b) Etablir les égalités : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n \text{Log} \frac{n}{k} = \text{Log} \left(\frac{n^n}{n!} \right)$.

c) En déduire que les suites : $n \mapsto v_n = \frac{1}{n} \text{Log} \left(\frac{n^n}{n!} \right)$ et $n \mapsto u_n = \frac{n}{\sqrt{n!}}$

ont des limites lorsque n tend vers l'infini. Calculer ces limites.

N.B. : dans le II - 3°, on pourra s'aider d'une représentation graphique.