

HX 5

Vendredi 11/2/83

Devoir à la maison 11, 2. 83
n° 3Exercice:

On suppose E de dimension finie ; q est une forme quadratique positive, non dégénérée ; $u \in \mathcal{L}(E, E)$.

Montrer alors l'équivalence des 3 propriétés suivantes :

i) $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $q(u(x)) = q(x)$.

ii) $q(x-y) = q(u(x)-u(y))$ et $u(0) = 0$

iii) $B(u(x), u(y)) = B(x, y)$ (B est la forme bilinéaire associée à q).

En déduire que $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}(E)$.

(On calculera $q(u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y))$)

Remarque : u est alors une isométrie de E .

Problème:

On pose $E = \mathbb{R}[X]$; soit $f \in \mathcal{C}([-1, +1], \mathbb{R}_+^*)$, on considère l'application F de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(x) Q(x) f(x) dx$.

On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$

1°) Montrer que F est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, positive sur E .

2°) Soit $P_0 = 1, P_1, \dots, P_n$ une suite de polynômes de E , unitaires et de degré égal à leur indice, montrer que les 3 conditions suivantes définissent une seule et même suite de polynômes (P_n) :

i) P_h et P_k sont orthogonaux si $h \neq k$ ($P_0, \dots, P_{n-1}$ étant déterminés, remarquer que $P_k(x) - x^k \in E_k$).

ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, P_k est orthogonal à tout polynôme A de degré $\leq k$ (ii $\Rightarrow$ i : évident)

iii) B_k étant un polynôme unitaire de degré k , $F(B_k, B_k)$ est minimum pour $B_k = P_k$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ (On remarquera que $B_k - P_k \in E_k$) (i $\Rightarrow$ iii : facile).

3°) On pose : $R(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_p)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ étant les 0 de P_k distincts 2 à 2, réels, strictement compris entre -1 et $+1$ et d'ordre impair (i.e. P_k change de signe en α_i). Montrer que $F(P_k, R) \neq 0$; en déduire le degré de R et que P_k a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises strictement entre -1 et $+1$.

4°) Montrer qu'il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$P_n(x) = (x + a_n) P_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x).$$

(On remarquera que $P_n - x P_{n-1} \in E_{n-1}$ et on exprimera a_n et b_n à l'aide d'intégrales définies).

Montrer que si f est paire : $a_n = 0$ et que la fonction polynôme est paire ou impaire suivant que n est pair ou impair.