

Centrale 82

$\mathcal{E}$ désigne un e.a. euclidien orienté rapporté à un R.O.N. positif $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; l'espace vectoriel associé est noté E . A, B, C sont les 3 points mobiles par rapport à $\mathcal{E}$ dont les positions à l'instant t sont les points $A(t), B(t), C(t)$ de coordonnées dans E :

$$A(t) \begin{cases} x = 0 \\ y = 5a \cos t \\ z = 5a \sin t \end{cases}$$

$$B(t) \begin{cases} x = a(3 \cos t - 4) \\ y = a(\cos t - 3) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$C(t) \begin{cases} x = a(3 \cos t + 4) \\ y = a(\cos t + 3) \\ z = 0 \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}_+^*$; le temps t décrit $]-\infty, +\infty[$.

PARTIE 1

- 1.1 Caractériser les mouvements des points A, B, C .
- 1.2 Montrer qu'à tout instant t , le triangle $(A(t), B(t), C(t))$ de $\mathcal{E}$ est rectangle isocèle et que les longueurs de ses côtés sont indépendantes du temps. En déduire que A, B, C peuvent être considérés comme 3 points d'un e.a. euclidien $\mathcal{E}'$ en mouvement par rapport à $\mathcal{E}$. Le point de $\mathcal{E}'$, milieu du bipoint (B, C) est noté P .

PARTIE 2

Dans le mouvement de $\mathcal{E}'$ par rapport à $\mathcal{E}$, on note:

$\Delta(t)$ l'axe central du torseur des vitesses à l'instant t ; $\vec{\Omega}(t)$ le vecteur rotation à l'instant t ; $R(t)\vec{\Omega}(t)$ le vecteur vitesse de glissement à l'instant t .

- 2.1 Montrer que les vecteurs $\vec{\Omega}(t)$ et $R(t)\vec{\Omega}(t)$ sont colinéaires.
- 2.2 Calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E . Calculer $R(t)$.
- 2.3 Trouver des équations de la droite $\Delta(t)$ dans le repère R et montrer que $\Delta(t)$ se projette orthogonalement sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ selon la droite $B(t)C(t)$.

A quels instants les droites $\Delta(t)$ et $B(t)C(t)$ sont-elles confondues?

(Montrer que, quand t varie, la droite $\Delta(t)$ engendre un cylindre de révolution Γ de $\mathcal{E}$ dont on donnera le rayon et l'axe; cet axe sera noté D).

PARTIE 3

On rapporte $\mathcal{E}'$ au repère $R' = (A; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ défini par: $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{AP}$; $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{BC}$; $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$.

- 3.1 Déterminer les coordonnées de $\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E .
- 3.2 Calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}(t)$ dans la base $\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t)$ de E .
- 3.3 Soit Δ_t la droite de $\mathcal{E}'$ dont la position dans $\mathcal{E}$ à l'instant t est $\Delta(t)$. Trouver les équations de Δ_t dans le repère R' et montrer que, quand t varie, Δ_t engendre un cylindre de révolution Γ' de $\mathcal{E}'$ dont on donnera le rayon et l'axe D' . Montrer, qu'à tout instant t , la portion $\Gamma'(t)$ de Γ' dans $\mathcal{E}$ contient la droite D introduite en 2.3 et que les cylindres Γ et $\Gamma'(t)$ de $\mathcal{E}$ admettent le même plan tangent en tous les points de $\Delta(t)$.

PARTIE 4

- 4.1 Que peut-on dire des mouvements (par rapport à $\mathcal{E}$) de 2 points distincts M et N de $\mathcal{E}'$ tels que la droite MN soit parallèle à la droite BC ? En déduire sans calculs qu'il existe une droite de $\mathcal{E}'$ dont chaque point décrit un segment de droite dans $\mathcal{E}$, et une droite de $\mathcal{E}'$ dont chaque point décrit un cercle dans $\mathcal{E}$.

- 4.2 Calculer les coordonnées dans R de la position $H(t)$ à l'instant t du point H de $\mathcal{E}'$ dont les coordonnées (fixes) dans le repère R' sont (X, Y, Z) . Quand t varie, le point $H(t)$ de $\mathcal{E}$ engendre la trajectoire (L_H) de H dans $\mathcal{E}$. Justifier: $\forall t \in \mathbb{R}: \vec{OH}(t) = \vec{W}_H + \vec{U}_H \cos t + \vec{V}_H \sin t$, où $\vec{U}_H, \vec{V}_H$ et $\vec{W}_H$ sont des vecteurs de E qui dépendent de (X, Y, Z) mais pas de t .

- 4.3 Montrer que, $\forall H \in \mathcal{E}'$, la trajectoire L_H admet un axe de symétrie Q_H . Quelle est la nature du sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué par les points Q_H ?

- 4.4 Rechercher les points $H \in \mathcal{E}'$ vérifiant i) ou ii): i) $\|\vec{U}_H\|$ minimal; ii) $\|\vec{V}_H\|$ minimal.

- 4.5 Trouver le sous-ensemble de $\mathcal{E}'$ constitué par les points H tels que L_H soit a) un segment de droite b) un cercle.

(

PARTIE 5

Dans cette dernière partie, on considère O comme un point mobile par rapport à $\mathcal{E}'$.

- 5.1 Calculer les coordonnées de O à l'instant t , dans le repère R' .