

1. f_0 est le produit de fct. continues (resp. dérivables) sur $\mathbb{R}^+$ donc continue (resp. dérivable).

2. $u_{a,n} = t_n^a \sin t_n$ où $t_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{a,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > -1 \\ 1 & \text{si } a = -1 \\ +\infty & \text{si } a < -1 \end{cases}$

$v_{a,n} = 0$ donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{a,n} = 0$.

b). Pour que f soit continue, il faut que $u_{a,n}$ et $v_{a,n}$ aient même limite; donc que $a > -1$. Or, si $a > -1$: $\lim_{t \rightarrow 0} |t|^a |\sin t| = 0$. Comme, pour $|f(t)| \leq |t|^a |\sin t|$ (car $|\sin \frac{1}{t}| \leq 1$) on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$. Donc, f est continue si $a > -1$.

3. f_a diff. en 0 si: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_a(t)}{t}$ existe. Or comme f est pair, il faut que cette limite soit nulle, donc: f_a diff. en 0 $\Leftrightarrow a > 0$ (cf 2° b).

$f'_a(t) = \varepsilon a |t|^{a-1} \sin t \cdot \sin \frac{1}{t} + |t|^a \cos t \sin \frac{1}{t} - |t|^{a-2} \sin t \cos \frac{1}{t}$. $a \in \mathbb{R}, t \neq 0$.
 $\lim_{t \rightarrow 0} = 0$ (car $\sin \frac{1}{t}$ est borné). La limite de ce terme n'existe que si $a > 1$ et elle est nulle.

Donc: f'_a est continue en 0 si $a > 1$.

5. On reconnaît une somme de Riemann: $w_{a,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$ $t_k = \frac{k}{n}$, comme f est continue (donc intégrable) sur $[0, 1]$ on en déduit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{a,n} = \int_0^1 f_a(t) dt$ (par $a > -1$).

6). 1. Non, g n'admet pas de limite en 0.

2. $(\sin t \cos \frac{1}{t})' = \cos t \cos \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \sin t \sin \frac{1}{t} \Rightarrow h(x) + B(x) = \sin 1 \cos 1 - \sin \pi \cos \frac{1}{\pi}$ (2° b)

3. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \cos \frac{1}{x}) = 0$ (même raison qu'en 2° b), il suffit de montrer que $B(x)$ admet une limite en 0. Or, on peut écrire: $B(x) = \int_x^1 \cos t \cdot t^2 d(\sin \frac{1}{t}) = [t^2 \cos t \sin \frac{1}{t}]_x^1 - \int_x^1 A(t) dt$

(après (après une intégration par parties)) $A(t) = \sin \frac{1}{t} [2t \cos t - t^2 \sin t]$

Or, $\lim_{t \rightarrow 0} A(t) = 0$ (cf 2° b)

et $\lim_{t \rightarrow 0} [t^2 \cos t \sin \frac{1}{t}] = \cos 1 \sin 1$ donc, $h(t)$ admet une limite à droite

en 0 et on peut prolonger h par continuité en 0. ($\bar{h}(0) = \int_0^1 A(t) dt$).

7). 1. En posant $u = \frac{1}{x}$ dans la 1^{ère} intégrale, on trouve $H(x) = 0$.

2. $x > 0$: $F(x) = \int_0^x \sin t \sin \frac{1}{t} dt = \int_0^1 \sin t \sin \frac{1}{t} dt + \int_1^x \sin t \sin \frac{1}{t} dt = I - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2} \sin t \sin \frac{1}{t} dt$ (C 1)

$F(x) = I + h(1/x)$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0^+$ et, comme $\lim_{x \rightarrow 0} h(1/x)$ existe, alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe. En $-\infty$: f est paire, $F(0) = 0 \Rightarrow F$ est impaire et admet donc 1 limite en $-\infty$.

8). 1. $c(t)$ n'est pas continue en 0 cependant: $\int_{\varepsilon}^{\infty} \cos t \frac{1}{t} dt = [t^2 \sin \frac{1}{t}]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} 2t \sin \frac{1}{t} dt$
 et, quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\int_{\varepsilon}^{\infty} c(t) dt = \pi^2 \sin \frac{1}{\pi} - \int_0^{\infty} 2t \sin \frac{1}{t} dt \Rightarrow d(x) = 0$.

2. $C(x)$ différentiable si: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C(x)}{x}$ existe. Or: $\frac{C(x)}{x} = \pi \sin \frac{1}{\pi} - \frac{1}{x} \int_0^{\infty} 2t \sin \frac{1}{t} dt$.
 (C est impaire) Or: $|\int_0^{\infty} 2t \sin \frac{1}{t} dt| \leq \int_0^{\infty} 2t dt = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{\infty} 2t \sin \frac{1}{t} dt = 0$

$B(x) = \int_x^1 \cos t \cos \frac{1}{t} dt = [C(t) \cos t]_x^1 - \int_x^1 C(t) \sin t dt$ (intégration par parties)

(produit de fct. différentiables, intégrable d'1 fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc, c'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$).

Donc, $B(x)$ est diff. en 0.

3. On a: $x \neq 0$: $\bar{h}(x) + B(x) = \sin 1 \cos 1 - \sin x \cos \frac{1}{x}$.

$\frac{\bar{h}(x) - \bar{h}(0)}{x} = - \frac{B(x) - B(0)}{x} = - \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x} \Rightarrow \bar{h}$ n'est pas différentiable en 0.
 car $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$.