

Problème :

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on suppose qu'il existe un couple (a, b) vérifiant :
 $0 < a$, $0 < b$ et $a + b < 1$ tels que :

$$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2| \quad (1)$$

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence : $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

1°. a) Etablir que f est continue et même uniformément continue dans $\mathbb{R}^2$.

b) Prouver que, si (u_n) converge vers l , l vérifie : $l = f(l, l)$.

c) Montrer que l'équation : $y = f(y, y)$ ne peut admettre qu'une seule solution.

2°. a) On pose : $d_n = |u_{n+1} - u_n|$; utiliser (1) pour obtenir une inégalité liant d_{n+1} , d_n et d_{n-1} . Montrer qu'il existe un couple unique (λ, μ) de réels positifs tel que l'inégalité précédente puisse s'écrire pour tout $n \geq 1$: $d_{n+1} + \lambda d_n \leq \mu(d_n + \lambda d_{n-1})$.

Vérifier que $\lambda < \mu < 1$ et en déduire : $\forall n \in \mathbb{N} : d_n \leq \mu^n \left(\frac{d_1}{\lambda} + d_0 \right)$.

b) Montrer qu'il existe un réel C_0 (dont on donnera la valeur) tel que : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, |u_{n+m} - u_n| \leq C_0 \mu^n$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente quel que soit le couple (u_0, u_1) vers une limite indépendante de ce couple.

3°. On suppose que f est différentiable en tout point. Montrer que (1) est équivalent à (2) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f'_1(x, y)| \leq a$ et $|f'_2(x, y)| \leq b$

4°. Soit la suite (u_n) définie par la donnée de (u_0, u_1) et la relation de récurrence : $u_{n+2} = \text{Log}(d u_{n+1}^2 + \beta u_n^2 + \gamma)$ où d, β et γ sont des réels positifs tels que : $\sqrt{d} + \sqrt{\beta} < \sqrt{\gamma}$.

Montrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite lorsque :

$$d = \frac{e}{16}, \quad \beta = \frac{3e}{16}, \quad \gamma = \frac{3e}{4}.$$