

Soit A un anneau commutatif, à élément neutre noté 1 . Soit S une partie de A possédant les propriétés suivantes :

$$(1) \quad 1 \in S$$

$$(2) \quad 0 \notin S$$

$$(3) \quad (\forall x \in A, \forall y \in A) [(x \in S \text{ et } y \in S) \Rightarrow (xy \in S)]$$

Soit F l'ensemble produit cartésien $A \times S$.

Sur F on définit :

1°. Une relation binaire R

$$[\forall (a, s) \in F, \forall (b, t) \in F] [(a, s) R (b, t)] \Leftrightarrow [\exists z \in S : z(at - bs) = 0]$$

2°. Une loi de composition, notée $+$

$$[\forall (a, s) \in F, \forall (b, t) \in F] [(a, s) + (b, t) = (at + bs, st)]$$

3°. Une loi de composition, notée $\cdot$

$$[\forall (a, s) \in F, \forall (b, t) \in F] [(a, s) \cdot (b, t) = (ab, st)]$$

I. 1°. Montrer que la relation R est une relation d'équivalence.

2°. Montrer que R est compatible avec $+$ et $\cdot$.

3°. En conclure (en citant le ou les théorèmes utilisés) que l'ensemble quotient F/R peut être muni de 2 lois quotient, que l'on notera encore $+$ et $\cdot$.

4°. Montrer que le triplet $(F/R, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire. On notera, pour tout $a \in A$ et tout $s \in S$, $\overline{(a, s)}$ la classe modulo R de $(a, s) \in F$.

5°. Soit $j: A \rightarrow F/R : a \mapsto \overline{(a, 1)}$

Montrer que j est une homomorphisme d'anneaux.

En conclure que $j(A)$ est un sous anneau de F/R .

Quel est le noyau de j ?