

I 1° $0 < b < a$. $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$: du signe de $a_n - b_n$.

il faut montrer que :

$\forall n: a_n > 0$
 $b_n > 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_{n+1}} - a_n = \frac{a_n(b_{n+1} - a_n)}{\sqrt{a_n b_{n+1}} + a_n} = \frac{a_n(b_n - a_n)}{2(\sqrt{a_n b_{n+1}} + a_n)}$$

du signe de $b_n - a_n$.

Etude du signe de $a_n - b_n$:

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}} - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_{n+1}(a_n - b_{n+1})}{2(\sqrt{a_n b_{n+1}} + b_{n+1})}$$

du signe de $a_n - b_n$.
réurrence marche.

2° $b_p \leq a_q$. $(a_n) \nearrow$ minorée, $(b_n) \nearrow$ majorée $\Rightarrow (a_n) (b_n)$ cglb.

$\ell_1 \lim (a_n)$ $\ell_2 \lim (b_n)$ $\Rightarrow \ell_2 = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$.

3° $b = a \cos \alpha$ - par récurrence :

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n [1 + \cos \frac{\alpha}{2^n}] = \frac{1}{2} a_n \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}$ car $\cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0$. c.q.f.d.

$a_n = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$
par récurrence.

$$a_{n+1} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} \times \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} = \frac{\sin \alpha}{2^{n+1} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}}$$

$2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \Rightarrow \lim a_n = \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

II.

1° $(xy)^2 = x^2 y^2 = xyxy \Rightarrow xy = yx$ (un simplifiant).

la réciproque est immédiate.

2° Par récurrence : $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$ évident.

$(xy)^n = x(yx)^{n-1}y = x^n y^n \Rightarrow (yx)^{n-1} = x^{n-1} y^{n-1}$ et en passant aux inverses :
 $\Rightarrow \Phi_{1-n}$.

3° a) $(xy)^n = x^n y^n \Rightarrow (xy)^n y^{-1} = x^n (yx)^{n-1} = x^n y^{n-1}$
 $(xy)^{n-1} x = y^{n-1} x^n$.

b) $[(xy)^m]^n = (x^m y^m)^n = x^{mn} y^{mn}$.

c) $x^{n(n-1)} y^n = (x^n)^{n-1} y^n = y^n \cdot x^{n(n-1)}$.

$x^{n(n-1)} y^n \cdot y^{1-n} = y^n \cdot (x^n)^{n-1} (y^n)^{n-1} = y^n (y^{-1})^{n-1} (x^{n-1})^n = y \cdot x^{n(n-1)}$
 $x^{n(n-1)} y$.

d) On a : $(xy)^{n(1-n)} = x^{n(1-n)} y^{n(1-n)}$ $\ell_1 = -1$.

$\ell_2 = +1$: on prend les inverses et on utilise le c).

par récurrence sur ℓ_2 : $(xy)^{n(n-1)(\ell_2+1)} = x^{n(n-1)\ell_2} y^{n(n-1)\ell_2} \cdot x^{n(n-1)} y^{n(n-1)}$
 $\ell_2 > 0$: or $x^{n(n-1)}$ commutative et $y^{n(n-1)}$ aussi - c.q.f.d.