

$$P_{n(n-1)k+1} : (xy)^{n(n-1)k+1} = x^{n(n-1)k+1} y^{n(n-1)k+1}.$$

$$\text{or : } y^{n(n-1)k} = (y^k)^{n(n-1)} \text{ donc commutative - c.q.f.d.}$$

$$P_{n(n-1)k+1-n} : (xy)^{n(n-1)k+n-1} = x^{n(n-1)k} y^{n(n-1)k} (xy)^{1-n}.$$

$$\text{or : } (xy)^{n-1} = y^{n-1} x^{n-1} \\ = x^{n(n-1)k-1} y^{n(n-1)k} (xy)^{n-1} y^{n(n-1)k} (xy)^{1-n} \\ = x^{n(n-1)k-1} y^{n(n-1)k} (xy)^{n-1} y^{n(n-1)k} (xy)^{1-n}$$

$$4^{\circ} : i \Rightarrow ii ? \quad u(n(n-1)) + v(m(m-1)) = 2.$$

$$(xy)^{u(n(n-1)) + v(m(m-1))} = (xy)^{u(n(n-1))} (xy)^{v(m(m-1))} = (x^u)^{n(n-1)} (y^v)^{m(m-1)} (x^v)^{m(m-1)} (y^u)^{n(n-1)}$$

$$\text{or : } x^{u(n(n-1))} y^{v(m(m-1))} \text{ commutative } \Rightarrow x^2 y^2 = (xy)^2. \quad \text{c.q.f.d.}$$

$$\text{III} - 1^{\circ} : x^2 - 2 = 0. \quad (x-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0.$$

$$(x-2)^3 = 3 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 11 = 0$$

$V(x)$ dimensionné $\Rightarrow x$ algébrique sur $\mathbb{Q}$.

$\exists$ famille de générateurs: $1, x, \dots, x^p$ et x^{p+1} s'expriment en fct. des autres.

$$\Leftarrow x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \text{ où : } a_0 = -\frac{a_0}{a_n}, \dots, a_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

$$x^{n+1} = x \cdot x^n = a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{n-1} x^n. \text{ or } x^n \text{ s'écrit } \dots$$

$$\Rightarrow x^{n+1}$$

$$\text{et par récurrence sur } p : x^{n+p} = \beta_0 x + \dots + \beta_{n-1} x^{n-1}.$$

$$\Rightarrow x^{n+p+1} = \dots$$

$$\Rightarrow (1, x, \dots, x^{n-1}) \text{ partie gén. de } V(x).$$

$$2^{\circ} : x^k y^k : x^k \text{ s'exprime en fct. de } 1, x, \dots, x^{n-1},$$

$$1, y, \dots, y^{m-1}$$

$$\Rightarrow x^k y^k \text{ s'exprime en fct. de } 1, x, \dots, x^{n-1} y, \dots, x^{n-1} y^{m-1}.$$

$$\text{c.q.f.d.}$$

$$V(xy) \subset \text{s.o.v. engendré par } \{x^k y^k\} \Rightarrow V(xy) \text{ dimensionné.}$$

$$V(x+y) \subset \text{---} V(x+y) \text{---}$$

$$3^{\circ} : x \text{ algébrique } \Rightarrow x^{-1} \text{ algébrique Evident.}$$

$$x \neq 0$$

$$0 \in \text{or stable par } + \text{ et } x. \quad \text{c.q.f.d.}$$

$$1 \in$$