

Problème :

L'utilisation des déterminants est déconseillée mais non interdite.

Les nombres utilisés sont tous réels.

On donne les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} I & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad N_1 = \begin{pmatrix} 2,01 & 3 & 5,99 & 1,98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

I

1°)-Déterminer l'inverse de M_1 ; on précisera à quelle étape du calcul est établie la régularité de M_1 . Les éléments de M_1^{-1} étant des entiers le calcul peut être conduit de manière à n'utiliser que des nombres entiers. D'autre part l'inverse étant utilisé dans les questions suivantes il est important d'éviter toute faute de calcul.

2°)-Calculer le carré de M_2 . Peut-on en déduire que M_2 est inversible? Si oui peut-on expliciter l'inverse de M_2 ?

II

n étant un entier au moins égal à 2 qui vaudra 4 dans les applications numériques. L est une matrice ligne à n éléments et C une matrice colonne à n éléments. On pourra poser :

$$L = (l_1 \ l_2; \dots l_n) \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Le produit CL est donc une matrice carrée d'ordre n et le produit LC une matrice à un seul élément auquel on peut l'identifier. On suppose L et C toutes deux non nulles.

1°)- Déterminer le rang de la matrice CL ; ~~calculer~~ calculer $(CL)^2$, puis déterminer le réel k pour que : $(I + CL)(I + kCL) = I$; on trouvera une condition sur le nombre LC pour que ce soit possible. Ecrire alors la matrice inverse de $I + CL$.

2°)- M étant une matrice régulière d'ordre n on considère $N = M + CL$. En écrivant $N = M(I + M^{-1}CL)$, déterminer la condition nécessaire et suffisante sur le réel $LM^{-1}C$ pour que N soit inversible et montrer que dans ce cas l'on a : $N^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1 + LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1}$.

3°)- Montrer que la matrice $N_1 - M_1$ peut s'écrire comme produit d'une colonne C par une ligne L et qu'on peut choisir $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Prouver que N_1 est inversible et déterminer son inverse en utilisant les résultats du I.1° et du II.2°.