

4)- Déterminer par quel nombre il faut remplacer l'élément de la 2^e ligne, 4^e colonne de M_1 pour que la matrice obtenue ne soit plus régulière. Même question pour M_2 (On pourra utiliser les déterminants)
Expliquer pourquoi et comment l'énoncé " toute matrice carrée est soit inversible soit non inversible" doit être nuancé lorsqu'on passe aux applications numériques.

III

Il s'agit dans cette partie, d'obtenir des conditions suffisantes pour que l'inversion d'une matrice numériquement se présente favorablement (comme pour M_2). Pour toute matrice A on note $\Psi(A)$ la plus grande des valeurs absolues des éléments a_{ij} de A : $\Psi(A) = \sup_{i,j} |a_{ij}|$

1°)- A et B étant deux matrices de dimension respectives (m,p) et (p,q) établir $\Psi(AB) \leq p \Psi(A) \Psi(B)$ et montrer par un exemple que cette majoration de $\Psi(AB)$ ne peut pas être améliorée pour A et B quelconques.

λ étant un réel évaluer $\Psi(\lambda A)$ en fonction de λ et de $\Psi(A)$.

2°)- On reprend les notations du II.2° : M matrice régulière d'ordre n ayant subi une petite modification de la forme CL est devenue $N = M + CL$.

Soit $\xi = \Psi(L) \Psi(C)$ si $\xi < \frac{1}{n^2 \Psi(M^{-1})}$ alors montrer que N est inversible.

3°)- On se restreint désormais au cas où les modifications de M ne porte que sur une seule ligne de sorte que $n-1$ éléments de C sont nuls et qu'on peut prendre le n^{eme} égal à 1. On aura ainsi :

$$\Psi(N - M) = \Psi(CL) = \Psi(L) = \xi.$$

Etablir l'inégalité $\Psi(M^{-1}C) \leq \Psi(M^{-1})$ et en déduire que si $\xi < \frac{1}{n \Psi(M^{-1})}$, la matrice est inversible.

Montrer, en remplaçant la première ligne de la matrice M_2 par 4 éléments nuls, que cette condition ne peut pas être améliorée pour une matrice quelconque.

Supposant cette condition satisfaite donner une majoration de la valeur absolue des modifications subies par les éléments de l'inverse.

4°)- Appliquer les résultats obtenus à la question précédente aux 2 cas suivants :

- $\xi = 10^{-3}$ et M_2 pour matrice M ;
- $\xi = 10^{-3}$ et M_1 pour matrice M .

d'après I.N.A. & E.N.S.A. 76

EXERCICE COMPLEMENTAIRE :

Soit D_n le déterminant d'ordre n défini par $a_{ii} = x^2$, $a_{i,i+1} = x + 1$, $a_{i,i-1} = x-1$, les autres a_{ij} étant nuls.

- Donner une relation de récurrence entre D_n , D_{n-1} , D_{n-2} .
- Calculer D_n en fonction de n .

Idée du barème : Problème 17,5 I 4 ; 1° 3 2° 1
II 8,5 ; 1° 2 2° 2 3° 2,5 4° 2 III 5 ; 1° 2 2° 1 3° 1,5 4° 0,5
Exercice : 2,5 1° 1 2° 1,5