DEVOIR SURVEILLÉ n° 1

I- Suite arithmético-géométrique :
Soient a et b deux réels vérifiant $0<b<a$. On définit alors la suite (a_n) et la suite (b_n) par : $a_1=\sqrt{ab}$, $b_1=\frac{a+b}{2}$ ... , $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

1°)- Montrer alors que la suite (b_n) est croissante et la suite (a_n) décroissante. Vérifier que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n\leq a_n$.

2°)- Montrer que : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2$ on a: $b_p\leq a_q$. Etablir que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.

3°)- On se propose de déterminer cette limite : on pose $b=a\cos\alpha$ avec $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Montrer alors les égalités suivantes : $b_n=a_n\cos\alpha/2^n$ et $a_n=a\cos\alpha/2\ldots\cos\alpha/2^n$ puis : $a_n=(\sin\alpha)/(2^n\sin\alpha/2^n)$
En déduire la limite commune à (a_n) et (b_n) en fonction de a et α.

II- Conditions pour qu'un groupe soit commutatif.
G est un groupe, on définit $\forall n\in\mathbb{Z}$ $\varphi_n : G\longrightarrow G$: $\varphi_n(x)=x^n$
On appelle (P_n) la condition :
φ_n est un endomorphisme de G (i.e. $\varphi_n(xy)=\varphi_n(x)\varphi_n(y)$.)

1°)- Montrer l'équivalence de i et ii :
i) G vérifie (P_2) ii) G est commutatif .

2°)- Montrer que G vérifie (P_n) ssi G vérifie (P_{1-n}) . (on pourra montrer par récurrence : $(xy)^n=x(yx)^{n-1}y$)

3°)- On suppose que G vérifie (P_n). Montrer alors les propriétés suivantes :
a) $\forall x\in G,\forall y\in G$, $x^n y^{n-1}=y^{n-1}x^n$.
b) Si G vérifie aussi (P_m), alors G vérifie (P_{nm}) .
c) $\forall x\in G,\forall y\in G$ $x^{n(n-1)}y=yx^{n(n-1)}$ (que signifie cette égalité ?)
d) Montrer que $\forall k\in\mathbb{Z}$, G vérifie $(P_{n(n-1)k})$, $(P_{n(n-1)k+1})$, $(P_{n(n-1)k+n-1})$ et $(P_{n(n-1)k+(n-1)^2})$.
(Indications : dans le c) on utilisera $x^{n(n-1)}=(x^n)^{n-1}=(x^{n-1})^n$ et dans le d) il est conseillé d'utiliser le b) puis le c).

4°)- Soient n et m deux entiers tels que : $n(n-1)\wedge m(m-1)=1$.
Montrer que les deux conditions sont équivalentes :
i) G vérifie (P_n) et (P_m)
ii) G est commutatif.
(On utilisera l'identité de Bezout et on montrera que G vérifie (P_2).)
N.B. : certaines questions étant délicates, il sera tenu compte de la présentation ainsi que de la rigueur des démonstrations.

III- Nombres algébriques sur Q.
On dit qu'un nombre réel x est algébrique sur Q ssi il existe une relation $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$ avec $\forall i\in[0,n]$ $a_i\in\mathbb{Q}$ et $a_n\neq 0$.

1°)- Montrer que $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{5}$, $2-\sqrt[3]{3}$ sont algébriques. Soit V(x) l'espace vectoriel sur Q engendré par la partie de R : $\{1, x, x^2,\ldots, x^n,\ldots\}$.
Montrer l'équivalence suivante : V(x) dimensionné $\Leftrightarrow$ x algébrique sur Q .
En fait V(x) est un sous-espace vectoriel de R .
(On montrera, par récurrence sur p, que x^{n+p} s'exprime en fonction de $1, x, \ldots, x^{n-1}$.)

2°)- Soient x et y deux nombres algébriques tels que :
$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$ et $b_0+b_1y+\ldots+b_mx^m=0$ avec $a_n\neq 0$ et $b_m\neq 0$.
Montrer que le S.e.v. engendré par : $\{x^hy^k,(h,k)\in\mathbb{N}^2\}$ est dimensionné (utiliser l'indication du 1°).)
En déduire que xy et x + y sont algébriques .

3°)- Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques sur Q est un sous-corps de R.

Idée du barème : I 6 : 1°) 2 2°) 2 3°) 2
II 8 : 1°) 0,5 2°) 1,5 3°) 5 : a) 1 b) 0,5 c) 1,5 d) 2 3°) 1
III 6 : 1°) 2,5 2°) 2,5 3°) 1
Quelques conseils : bien lire l'énoncé en soulignant les passages qui semblent importants; commencer par l'exercice qui inspire le plus (!); en le signifiant clairement, on peut admettre une question pour en déduire une autre; ne pas trop s'attarder sur les questions : surveiller le temps.