

Soit Γ la ligne représentative, en axes rectangulaires de la fonction définie par :

$$y = \frac{x^2 - 2\lambda x + \mu}{x^2 - 1} \quad (1)$$

On suppose dans le problème : $\lambda^2 > \mu$

Γ coupe l'axe $x'Ox$ en 2 points A et B d'abscisses a et b.

1°) Démontrer que la pente de la tangente à Γ en A, par exemple est : $\frac{2(a-\lambda)}{a^2-1}$

Former alors la relation entre λ et μ , nécessaire et suffisante, pour que les tangentes en A et B à Γ soient parallèles.

On supposera cette condition réalisée dans toute la suite. Les lignes Γ dépendent alors du seul paramètre λ . Entre quelles limites peut varier ce paramètre ?

Démontrer que la fonction définie par (1) n'a ni maximum, ni minimum.

2°) Déterminer en fonction de λ la pente de la direction commune δ des tangentes en A et B à Γ . Démontrer qu'il existe 2 autres points A' et B' de Γ où la tangente est parallèle à δ . Vérifier que, si a' est l'abscisse de A' par exemple, l'ordonnée de ce point est $2 - \lambda/a'$.

Démontrer que la droite A'B' est perpendiculaire à δ .

3°) Discuter, suivant la position d'un point M dans le plan, le nombre de lignes Γ passant par M.

Quel est, en particulier, le lieu des points M où passent 2 lignes confondues ? Démontrer que ~~toute~~ toute ligne Γ est tangente à δ en un point.

II-

Résoudre l'équation : $\frac{\sin x + 2\sin 2x - \sin 5x}{2(\cos x - \cos 4x)\sin 3x} \equiv 1$

M.B. : bien lire l'énoncé et ne pas hésiter à souligner les phrases où les mots importants. Pour bien comprendre les questions, il est conseillé de faire des dessins (un dessin vaut mieux qu'un long discours !).

Dans le I, beaucoup de calculs peuvent être évités en faisant appel aux fonctions symétriques élémentaires des racines de : $x^2 - 2\lambda x + \mu = 0$ (i.e. $s = a + b$ et $p = a.b$)

Dans le II, il est fortement conseillé de raisonner par équivalences pour ne pas introduire de solutions parasites.