

2°. a). On pose : $d_n = |u_{n+2} - u_n|$; utiliser (1) pour obtenir une inégalité liant d_{n+2}, d_n, d_{n-1} . Montrer qu'il existe un couple unique (λ, μ) de réels positifs tels que l'inégalité précédente puisse s'écrire pour tout $n \geq 1$: $d_{n+2} + \lambda d_n \leq \mu (d_n + \lambda d_{n-2})$ et vérifier que $\lambda < \mu < 1$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : d_n \leq \mu^n \left(\frac{d_1}{\lambda} + d_0 \right)$.

b). Montrer qu'il existe un réel C_0 (dont on donnera la valeur) tel que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, |u_{m+n} - u_n| \leq C_0 \cdot \mu^n$; en déduire que la suite (u_n) est convergente quel que soit le couple (u_0, u_1) vers une limite indépendante de ce couple.

3°. On suppose que f est différentiable en tout point. Montrer que (1) est équivalent à (2) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |f'_x(x, y)| \leq a \text{ et } |f'_y(x, y)| \leq b. \quad (2).$$

4°. Soit la suite (u_n) définie par la donnée de (u_0, u_1) et la relation de récurrence : $u_{n+2} = \log(d u_{n+1}^2 + \beta u_n^2 + \gamma)$ où d, β, γ sont des réels positifs tels que $\sqrt{d} + \sqrt{\beta} < \sqrt{\gamma}$.

Montrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite lorsque $d = \frac{e}{16}, \beta = \frac{e e}{16}, \gamma = \frac{3e}{4}$.

+ Question :

(Chercher λ pour que :

$$\cos(ax - by) \cdot \cosh \lambda (bx + ay) = f(x, y) \text{ vérifie :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Idee du barème :

I. 4 p^{ts}.

II - 3 p^{ts}

III. 10 p^{ts}.

Question

1°. 1

1°. 2 p^{ts}

3 p^{ts}

2°. 2,5

2°. 5 p^{ts}

3°. 0,5

3°. 1

4°. 2