

I. Exercice: ensembles convexes : le corps de base est $\mathbb{R}$.

On appelle segment $[a, b]$ dans un espace affine E l'ensemble: $\{m, \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0 : \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}$

Une partie de E est convexe si elle contient tous les points de $[a, b]$ dès qu'elle contient a et b .

1°. Montrer que l'intersection d'une famille de parties convexes est convexe. En déduire l'existence d'une plus petite partie convexe contenant les points $a_i, i \in I$ et $a_i \in E$ (appelée enveloppe convexe).

2°. Montrer que l'enveloppe convexe des $a_i, i \in I$ est l'ensemble des barycentres "positifs" des a_i (c.à.d. les coefficients des a_i sont positifs ou nuls).

3°. Représenter l'enveloppe convexe de 3 pts du plan.

On prend pour $\{a_i\}$ l'ensemble: $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} \cup \{1, 1\}$ dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Représenter l'enveloppe convexe de cette famille de points.

II. Exercice:

Résoudre l'équation aux dérivées partielles:

$$\textcircled{1}. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{où } f \text{ est 1-fonction de 2-variables admettant des dérivées partielles con d'ordre 2 continues.}$$

(on choisira a et b pour que, en faisant le changement de variable: $u = x + ay$
 $v = x + by$
 l'équation $\textcircled{1}$ se simplifie: $F(u, v) = f(x, y)$).

(à préciser)

III. Problème.

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe un couple (a, b) :

$0 < a, 0 < b$ et $a + b < 1$ tels que: $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2| \quad (\ast).$$

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°. a). Etablir que f est continue et même uniformément continue dans $\mathbb{R}^2$.

b). Montrer que, si (u_n) converge vers ℓ , ℓ vérifie $\ell = f(\ell, \ell)$.

c). Montrer que l'équation $z = f(z, z)$ ne peut admettre qu'une seule solution.