

Les courbes seront construites avec beaucoup de soin ; cependant la forme (position / asymptote & points remarquables) aura plus d'importance que l'exactitude des coordonnées des points.

I- Exercices : pour chacune de ces deux courbes on étudiera le signe de r , les points d'inflexions ainsi que la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

1°) étude de $r = 1/(\cos\theta + \cos 6\theta)$; montrer que les points d'inflexions sont alignés et que la droite d'alignement a pour équation : $x = 1$.

2°) étude de $r = \cos(\theta + \pi/4)/\cos(2\theta)$; on aura intérêt à changer l'expression de r . Calculer l'angle V .

II- Problème : soit la courbe (C_m) définie dans le plan affine rapporté à un repère cartésien par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t^2 + m/t \\ y = t + m/t \end{cases}$ m étant un réel non nul caractérisant la courbe (C_m) .

1°) Montrer qu'il existe une valeur unique m_0 telle que (C_{m_0}) présente un point stationnaire ; construire (C_{m_0}) avec soin.

2°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (C_m) possède un point double A_m ; calculez les coordonnées de A_m et représenter l'ensemble des points A_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

3°) Chercher une C.H.S. portant sur les fonctions symétriques des paramètres t_1, t_2, t_3 des points M_1, M_2, M_3 de la courbe (C_m) (m étant fixé) pour que ces trois points soient alignés. Retrouver ainsi le point double éventuel de (C_m) .

4°) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de point d'inflexion de (C_m) (ne pas se contenter de la C.H. !); prouver que, lorsque (C_m) possède 3 points d'inflexions, ces 3 points sont alignés et préciser l'équation de la droite qui les porte.

5°) Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des (C_m) ; montrer que cet ensemble est inclus dans la courbe (U) définie par la représentation paramétrique :

$$x = \frac{3u^3}{3u - 1} \quad y = \frac{u(4u - 1)}{3u - 1} \quad . \text{ Construire } (U).$$

6°)

Construire sur une même représentation graphique les courbes (C_m) pour $m = -2$, $m = 1/4$, $m = 2$ (on utilisera la position de (C_m) par rapport à la parabole d'équation $y^2 = x + 4$ et on représentera aussi l'ensemble des points d'inflexion.)