

Corrigé du devoir

EXERCICE :

1°). On trouve : $y = \begin{cases} e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) & \text{si } x < 0 \\ e^{-x}\left(\left(\frac{x}{2} + d\right)\cos x + \beta \sin x\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2°). $y_0(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ or $d = 0$.

En faisant un D.L. à l'ordre 1 en 0 : alors : $y_0'(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}, \beta = 0$.

D'où : $y_0 = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-x} \sin x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{x}{2} e^{-x} \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (évident) et aussi en 0.

y_0' " " " " " "

Cherchons un D.L. de y_0 : $\begin{cases} \text{si } x < 0 : y_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \text{si } x > 0 : y_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases} \Rightarrow y_0''$ est bien définie en 0 et $y_0''(0) = 1$.

Puis : $1 + 2(-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 0 = 0$ c.q.f.d.

3°). D.L. à l'ordre 3 : $x < 0 : y_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$x > 0 : y_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Donc, $n = 2$ et le D.L. demandé est donc : $y_0(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

PROBLÈME :

1°). Si $a < 0 : a = -\alpha^2 \Rightarrow f(x) = \lambda \sinh \alpha x + \mu \cosh \alpha x$ or : $f(0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$
or $f(1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
donc : $f \equiv 0$.

Si $a = 0 : \Rightarrow f(x) = \alpha x + \beta$ or : $f(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$ et $f(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.
donc : $f \equiv 0$

Si $a > 0 : a = \alpha^2 \Rightarrow f(x) = \lambda \sin \alpha x + \mu \cos \alpha x$ $f(0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$.

et $f(1) = 0 \Rightarrow \lambda \sin \alpha = 0$. Si $\alpha \neq k\pi$ i.e. si $a \neq k^2\pi^2, k \neq 0$.
alors : $f \equiv 0$.

Si $\alpha = k\pi, k \neq 0$, alors, (S) admet une solution non nulle.

En conclusion : si $a \neq k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}^*$, alors (S) n'admet que la solution nulle.

si $a = k^2\pi^2$, alors, (S) admet les solutions : $f(x) = \lambda \sin(k\pi x)$.

2°) On remarque que : $\left(\int_0^1 g(t) dt\right)' = -g(x)$ puis : $\phi'(x) = -\int_0^x \varphi(t) dt + \int_{\pi}^1 (1-t)\varphi(t) dt$
et enfin : $\phi''(x) = -\varphi(x)$ et bien sûr : $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

b) Si $\phi_1'' = -\varphi \Rightarrow \phi_1'' - \phi = 0 \Rightarrow \phi_1' - \phi = a \Rightarrow \phi_1 - \phi = ax + b$.

or : $\phi_1(0) = \phi(0) \Rightarrow b = 0$ et $\phi_1(1) = \phi(1) \Rightarrow a = 0$. donc : $\phi_1 = \phi$.

3°) 2° a : (R) $\Rightarrow$ (S) donc, (S) $\Leftrightarrow$ (R).

2° b : (S) $\Rightarrow$ (R)