

$$4^{\circ}) \quad a) \quad |f(x)| \leq (1-x) \int_0^x |p(t)| |f(t)| dt + x \int_x^1 |(1-t)| |p(t)| |f(t)| dt \quad \text{or: } |p(t)| \leq m \text{ et } |f(t)| \leq M$$

donc, en reportant dans les intégrales on trouve:

$$|f(x)| \leq (1-x) \cdot \frac{x^2}{2} m \cdot M + x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} m \cdot M = x(1-x) \cdot \frac{mM}{2}$$

comme: pour: $x \in [0,1]: x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, on en déduit l'inégalité demandée.

$$b) \quad \text{Si } m < 8 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{m}{8} M \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \frac{m}{8} M \quad \text{si } M \neq 0 \Rightarrow M < M \text{ impossible,}$$

donc, $M = 0$ i.e. $f \equiv 0$.

5°) $\pi > 3 \Rightarrow \pi^2 > 9 > 8$ donc, les résultats obtenus au 1° et au 4° b ne se contredisent pas (!).

5°) a). 2 méthodes: - on montre, comme au 2°:

$$f \text{ vérifie (S)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{c-x}{c-b} \int_b^x (t-b) p(t) f(t) dt + \frac{x-b}{c-b} \int_x^c (c-t) p(t) f(t) dt$$

et avec les mêmes majorations qu'au 4° a on obtient: $|f(x)| \leq m \cdot M \cdot \frac{(c-b)^2}{8}$.

$$\text{on pose: } g(x) = f[(c-b)x + b]$$

$$\text{puis: } g''(x) = (c-b)^2 f''[(c-b)x + b] = - \underbrace{(c-b)^2 p[(c-b)x + b]}_{P_2(x)} \cdot \underbrace{f[(c-b)x + b]}_{g(x)}$$

$$m_1 = \sup_{x \in [0,1]} |P_2(x)| = (c-b)^2 \cdot m$$

$$\Rightarrow g(x) \leq \frac{m_1 M}{8} = \frac{(c-b)^2 m M}{8} \quad x \in [0,1]$$

$$M_1 = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| = M$$

$$\text{i.e. } f(x) \leq \frac{(c-b)^2 m M}{8} \quad \text{si } x \in [b, c].$$

b). De même qu'au 4° b, si $m(b-c)^2 < 8$, alors, toute solution de (S) est nulle.

$$\text{II. } 1^{\circ}) \quad g(x) = -f(-x) \quad g''(x) = -f''(-x)$$

$$\text{or: } f''(-x) + \frac{p}{(x^2+1)} f(-x) = 0 \Rightarrow g''(x) + \frac{p}{x^2+1} g(x) = 0 \Rightarrow g \text{ vérifie (S')}$$

$$\text{puis, } g(0) = 0, \quad g'(x) = f'(-x) \Rightarrow g'(0) = 1 \quad \text{donc: } g = f$$

f est impaire.

$$2^{\circ}) \quad P''(x) = n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + Q''(x) \quad \deg Q''(x) < n-2$$

$$\Rightarrow R = -n(n-1), \text{ mais comme } P \text{ est impair } \Rightarrow n = 2p+1, \text{ donc,}$$

$$\text{nécessairement } R = -2p(2p+1) \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$3^{\circ}) \quad R = -6 \Rightarrow P(x) = x^3 + x \quad ; \text{ puis, en posant } f(x) = \lambda P(x)$$

$$\text{I on trouve: } \lambda' = \frac{c}{x^2(x^2+1)^2} \quad \text{d'où:}$$

$$f(x) = A [3x^2 + 2 + 3x(x^2+1) \operatorname{Arctg} x] + B x(x^2+1)$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow B = 0$$

(S) est une équ. diff. avec conditions aux limites et (S') une équ. diff. avec conditions initiales.

On a vu en I 1° que (S) pouvait avoir plusieurs solutions; en II, si on prend une équ. diff. non homogène, on ne serait pas sûr d'avoir une solution. Par contre, (S') admet à chaque fois une unique solution.