

HX5

Devoir surveillé.

L'espace affine euclidien E_3 est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A toute courbe Γ de E_3 , on associe la courbe Γ' ensemble des centres de courbures de la courbe Γ . On étudie les courbes Γ , non planes, dont les courbes associées Γ' sont planes.

I. On considère la courbe Γ_0 , ensemble des p^t $M(\lambda)$ tels que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{OM}(\lambda) = \frac{a\sqrt{2}}{\cosh \lambda/a} \vec{i} + [\lambda - a \operatorname{th}(\lambda/a)] \vec{j} + a \operatorname{th}(\lambda/a) \vec{k}. \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

a). Dessiner les 3 projections de Γ_0 sur les plans de coordonnées.

b). Déterminer le trièdre de Frenet en un point quelconque de Γ_0 orientée dans le sens des λ croissants. Calculer le rayon de courbure de Γ_0 au point $M(\lambda)$ et déterminer la courbe Γ'_0 associée à la courbe Γ_0 .
(On trouvera une relation très simple entre $d\lambda$ et $d\lambda'$).

II. 1°. Soit Γ une courbe non plane arbitraire de courbe associée Γ' . M' étant le centre de courbure de Γ au point M , montrer que la tangente en M à Γ et la tgte en M' à la courbe Γ' sont orthogonales.

2°. p et u étant 2 fonctions réelles d'une variable réelle admettant des dérivées continues p' et u' dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ qui contient 0, on considère la courbe Γ , ensemble des points $M(\theta)$ définis par:

$$\forall \theta \in I: \vec{OM}(\theta) = \left[\int_0^\theta p(r) \cos u(r) dr \right] \vec{i} + \left[\int_0^\theta p(r) \sin u(r) dr \right] \vec{j} + u(\theta) \vec{k}$$

On suppose que la fonction u' , dérivée de la fonction u , est strictement positive dans l'intervalle I . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ' associée à la courbe Γ soit une courbe du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est:

$$u(p'^2 + p'^2 u'^2 + p'^2) - p(1 + p^2) p' u' = 0$$

(On écrira le vecteur tangent unitaire).

Montrer que, si la fonction p , continue, à dérivée continue dans l'intervalle I , est donnée, p et p' ne s'annulant pas dans I , il existe en général des fonctions u telles que la condition précédente soit vérifiée.

3°. Dans cette question, on propose de déterminer au moyen de l'expression proposée au 2.° ci-dessus quelques courbes Γ dont la courbe Γ' associée est une courbe du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a). Résoudre le problème lorsque p est la fonction définie par $p(\theta) = \frac{2 \sin \theta}{\cosh^2 \theta}$ et où $I =]-\pi/2, +\pi/2[$.

Montrer que l'orthotrace, en particulier, la courbe Γ_0 (de la partie I) (moyennant une translation sur l'axe des x). Pour cela, on posera: $\theta = -\operatorname{Arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \rho)$.
(pour l'intégration, on aura intérêt à faire le changement de variable $v = \operatorname{tg} \theta$).

b). Résoudre le problème lorsque p est la fonction définie par: $p(\theta) = \operatorname{tg} \theta$ et où $I =]-\pi/2, +\pi/2[$. Déterminer une représentation paramétrique des courbes Γ_1 correspondantes, l'ordonnée $y(\theta)$ étant laissée sous forme d'intégrale définie.

c). On adopte enfin la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(\theta) = \operatorname{sh} \theta$.

Montrer que les courbes Γ_2 obtenues sont définies par la représentation paramétrique (moyennant une translation sur l'axe des x)

$$x = \frac{a}{10} (2 \cosh \theta \cosh 2\theta + \sinh \theta \sinh 2\theta)$$

$$y = \frac{a}{10} (2 \sinh \theta \cosh 2\theta - \cosh \theta \sinh 2\theta)$$

$$z = a \operatorname{sh} \theta.$$

(a désigne une constante arbitraire)

d). Effectuer les tracés des projections sur les trois plans de coordonnées d'une des courbes Γ_2 . (on étudiera les fonctions pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et on indiquera ensuite le comportement de ces courbes).