

EXERCICE /:

On donne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = f$ (E)
 où y est la fonction inconnue et où f est définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1°) Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
 (On aura intérêt, pour la suite, à donner des noms différents aux constantes arbitraires qui figurent dans les solutions générales sur les 2 intervalles.)

2°) Démontrer que (E) a, sur $\mathbb{R}$, une solution y_0 et une seule telle que :
 $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = -1/2$. $\mathbb{R}$ (On n'oubliera pas de vérifier que y_0 est 2 fois dérivable au point 0, et que $y_0''(0) + 2y_0'(0) + 2y_0(0) = f(0)$.)

3°) Pour quelles valeurs de l'entier positif n la fonction y_0 admet-elle un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n , suivant les puissances de x ? Donner ce développement lorsqu'il existe.

PROBLEME :

I Soit p une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On étudie le système (S) défini par :

$$(S) \quad \begin{cases} f''(x) + p(x)f(x) = 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

la fonction f inconnue étant 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1°) Dans le cas où p est constante : $p(x) = a$, montrer que (S) a la seule solution : $f = 0$, sauf pour certaines valeurs de a que l'on précisera.

2°) Soit φ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et Φ l'application définie pour tout x réel, par :

$$\Phi(x) = (1-x) \int_0^x t \varphi(t) dt + x \int_x^1 (1-t) \varphi(t) dt.$$

a. Montrer que Φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que l'on a $\Phi'' = -\varphi$ et $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

b. Montrer, réciproquement, que si Φ est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $\Phi'' = -\varphi$ et $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$, alors Φ est égale à Φ .

3°) Dédire de ce qui précède que, pour que f soit solution du système (S), il faut et il suffit que :

$$(R) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (1-x) \int_0^x t p(t) f(t) dt + x \int_x^1 (1-t) p(t) f(t) dt.$$