

Corrigé du devoir surveillé

EXERCICE:

1°/ $R(a) = R(b) \Rightarrow \exists a_1 \in]a, b[: R'(a_1) = 0 \Rightarrow \exists c \in]a, a_1[: R''(c) = 0$

2°/ $R = f - g : R(a) = R(b), R'(a) = 0 \Rightarrow \exists a_1 \in]a, b[: R'(a_1) = 0$

donc : $(f_1 - g_1)(a) = (f_1 - g_1)(b) \Rightarrow \exists c \in]a, a_1[: f_1'(c) = g_1'(c)$

3°/ $f_1'(x) = \frac{f''(x)}{(1+f''^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}$

Interprétation géométrique : si (C) et (D) ont mêmes extrémités et si en A (où elles ont même tangente ; alors, on peut trouver c élément de]a, b[tel qu'aux points (c, f(c)) et (c, g(c)) les courbes (C) et (D) aient même courbure.

PROBLEME I:

1°/ a. $\frac{d\vec{I}}{dr} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I} = \vec{E} \wedge \vec{I} \Rightarrow \vec{I} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \frac{dx}{dr} = -y ; \frac{dy}{dr} = x ; \frac{dz}{dr} = 0$

On en déduit alors : $\vec{I} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

b. $(\vec{I}, \vec{E}, -\vec{u})$: b.o. > 0 ; on $\vec{J} \perp \vec{I} \Rightarrow \vec{J} \in$ plan engendré par $\vec{E}$ et $\vec{u}$ (et $\frac{d\vec{u}}{dr} = -\vec{I}$)

$\frac{d\vec{J}}{dr} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J} \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = 1 \quad \vec{J}(0) = \vec{E} \Rightarrow \theta = t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{J} = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ \cos^2 t \\ \cos t \end{pmatrix}$

2°/ $R > 0$: D_2 est la tangente en A à (C) $\Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{N} = \vec{u} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où : $R = 2R$ (ou $\frac{1}{R^2} = \frac{1}{2R}$) et $T = 2R$ (ou $\frac{1}{T} = \frac{1}{2R}$).

PROBLEME II:

1°/ a. $\vec{V} = v \vec{e} + v \vec{E} : \vec{A} = \frac{v^2}{R} \vec{n}$

b. $\frac{d\vec{P}}{dr} = \vec{V} + \lambda \frac{d\vec{A}}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} v \vec{A} ; \frac{d\vec{P}}{dr} = \left[1 + \frac{d}{dr} \left(\frac{d\lambda}{dr} v \right) \right] \vec{A} + 2 \frac{d\lambda}{dr} v \frac{d\vec{A}}{dr} + \lambda \frac{d^2 \vec{A}}{dr^2}$

d'où : $(\vec{A} \wedge \frac{d\vec{P}}{dr}) \cdot \frac{d\vec{P}}{dr} = 2 \frac{d\lambda}{dr} v \underbrace{(\vec{A} \wedge \frac{d\vec{A}}{dr}) \cdot \vec{V}}_{\frac{v^2}{R^3}} + \lambda \underbrace{(\vec{A} \wedge \frac{d^2 \vec{A}}{dr^2}) \cdot \vec{V}}_{= \frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{R^3} \right)} + \lambda^2 \underbrace{(\vec{A} \wedge \frac{d^2 \vec{A}}{dr^2}) \cdot \frac{d\vec{A}}{dr}}_{= 0 \text{ car les 3 vecteurs sont coplanaires}}$

donc : $2 \frac{d\lambda}{dr} = 3 \frac{dR}{R} \Rightarrow \lambda^2 = dR^3 \Rightarrow \lambda = R \cdot (dR)^{2/3}$ ou $E = \pm 1$.

c. $\vec{OP} \wedge \vec{W} = \lambda^2 \frac{v^2}{R^3} \cdot \vec{E}$ Si λ est admissible : $\frac{\lambda^2}{R^3} = d \Rightarrow \vec{OP} \wedge \vec{W} = d v^2 \vec{E}$ vecteur constant

Donc, le mouvement de P, effectuée suivant la loi des aires dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°/ a. $\frac{ds}{dt} = v$ et $ds = a\sqrt{2}e^\theta d\theta \Rightarrow e^\theta d\theta = \frac{v}{a\sqrt{2}} dt$ d'où : $\theta = \log\left(1 + \frac{v t}{a\sqrt{2}}\right)$

b. $R = a\sqrt{2}e^\theta ; \lambda = R \cdot R^{3/2} = R(a\sqrt{2})^{3/2} e^{3\theta/2} = C e^{3\theta/2}$ et $\vec{A} = \frac{v^2}{R} \vec{n} = \frac{v^2}{a\sqrt{2}} e^{-\theta} \cdot \vec{n}$

On : $(\vec{i}, \vec{e}) = \theta + \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{n}) = \theta + \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OM} + \lambda \cdot \vec{A} = a \begin{pmatrix} e^\theta \cos \theta \\ e^\theta \sin \theta \\ \frac{v}{a} t \end{pmatrix} + \frac{v^2}{a\sqrt{2}} e \begin{pmatrix} e^{3\theta/2} \cos(\theta - \pi/4) \\ -e^{3\theta/2} \sin(\theta - \pi/4) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{OP} = \begin{pmatrix} a e^\theta \cos \theta - \frac{v^2}{a\sqrt{2}} \cos(\theta - \pi/4) \\ a e^\theta \sin \theta - \frac{v^2}{a\sqrt{2}} \sin(\theta - \pi/4) \\ a\sqrt{2} e^\theta \end{pmatrix}$