

NB Les 3 parties du problème sont indépendantes entre elles.

E est l.e.v. de dim $= n$. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ un système de vecteurs de E , un système $[x_1, x_2, \dots, x_p]$ l.e.v. engendré par ce système.

On rappelle que si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, l.l.e.v. $F \subset E$ est stable par φ si $\varphi(F) \subset F$.

I.

1°. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que, par rapport à la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E , la matrice A de φ soit triangulaire supérieure. On pose $E_q = [e_1, e_2, \dots, e_q]$ pour $q = 1, 2, \dots, n$.

a). Quelle est la dimension de E_q ?

b). Vérifier que l'on a $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n = E$.

c). Montrer que $\forall q \in \{1, \dots, n\}$, E_q est stable par φ .

2°. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle qu'il existe des l.e.v. $E_1, \dots, E_n$ de E vérifiant

i) $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n$

ii) $\dim E_q = q$

iii) E_q est stable par φ pour tout $q \in \{1, \dots, n\}$

Montrer que l'on peut construire une base de E par rapport à laquelle la matrice de φ est triangulaire supérieure.

3°. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ satisfaisant aux hypothèses de la question I.

Montrer que, dans le cas où φ est inversible, il existe une base de E telle que la matrice de φ^{-1} par rapport à cette base soit triangulaire supérieure.

4°. On conserve les hypothèses de la question I et on suppose de plus que tous les éléments de la diagonale principale de A sont nuls.

a) Vérifier que $\varphi(E_1) = \{0\}$ et $\varphi(E_q) \subset E_{q-1}$ pour $q \in \{2, \dots, n\}$.

b). En déduire que $A^n = 0$.

II.

On dira que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(n)$) est nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N}^+ \varphi^k = 0$ (resp $A^k = 0$), le plus petit entier vérifiant cette condition sera appelé l'indice de φ (resp de A).

1°. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(n)$ est nilpotente, toute matrice A' semblable à A est nilpotente.

2°. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice $k > 1$.

a). Montrer qu'il existe au moins un vecteur $x \in E$ tel que $\varphi^k(x) \neq 0$.

b). Établir que pour tout vecteur $x = \{x, \varphi(x), \dots, \varphi^{k-1}(x)\}$ est système libre de E .

c). En déduire que, nécessairement $k \leq n$.

3°. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ une application nilpotente d'indice n .

a) Trouver une base de E par rapport à laquelle la matrice de φ a la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

b). Déterminer, en fonction des vecteurs de B' , une base de $\text{Ker } \varphi$ et une base de $\text{Im } \varphi$.

Comparer les l.e.v. $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Si G est un l.e.v. supplémentaire de $\text{Im } \varphi$, montrer que G est φ -stable.