

III.

Soit S une partie de $\mathcal{L}(E)$.

On dira qu'un s.e.v. F de E est stable par S si $\forall \psi \in S, \psi(F) \subset F$.

On dira qu'une application $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ commute avec S si $\forall \psi \in S$:

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi.$$

1°/- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec S .

a). Démontrer que $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$ sont des s.e.v. de E stables par S .

b). Montrer que φ^h commute avec S : $\forall h \in \mathbb{N}^*$.

c). $K[X]$ étant l'anneau des polynômes à 1 variable sur K , soit $f \in K[X]$: $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$.

On pose $f(\varphi) = a_0 \text{id}_E + a_1 \varphi + \dots + a_p \varphi^p$, où id_E désigne l'application identique de E .

Vérifier que $f(\varphi)$ commute avec S .

2°/- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble des polynômes $f \in K[X]$ tels que $f(\varphi) = 0$ est un idéal J de $K[X]$.

3°/- On suppose que les seuls s.e.v. de E stables par S sont E et $\{0\}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec S .

a). Montrer que : soit φ est nulle, soit $\varphi \in GL(E)$.

b). J étant l'idéal des polynômes $f \in K[X]$ tels que $f(\varphi) = 0$, on désigne par g le polynôme qui engendre J dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1. (On admettra que J n'est pas nul).

- Démontrer que g est un polynôme irréductible de $K[X]$.

- En déduire que si $K = \mathbb{C}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ v.e.p. que

$$\varphi = \lambda \cdot \text{id}_E.$$