

EXERCICE :

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

1°) Soit h une fonction réelle de classe C^1 sur $[a, b]$, pourvue d'une dérivée seconde sur $]a, b[$. On suppose que h vérifie les relations :

$h(a) = h(b)$ et $h'(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $h''(c) = 0$.

2°) On considère deux fonctions réelles f et g de classe C^1 sur $[a, b]$, pourvues chacune d'une dérivée seconde sur $]a, b[$. On définit sur $[a, b]$ les fonctions f_1 et g_1 par les formules : $f_1 = \frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}}$, $g_1 = \frac{g'}{\sqrt{1+(g')^2}}$. Montrer que si f et g vérifient :

$f(a) = g(a)$; $f'(a) = g'(a)$; $f(b) = g(b)$

il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f_1'(c) = g_1'(c)$.

3°) Soit (C) la courbe représentative d'équation : $y = f(x)$. Quelle relation y a-t-il entre $f_1'(x)$ et la courbure géométrique de (C) (i.e. $1/R$) au point d'abscisse x appartenant à $[a, b]$?

On désigne par (D) la courbe d'équation : $y = g(x)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat établi au 2° ?

(d'après E.N.S.A.E. 77)

PROBLEME I

Un espace affine euclidien E est mobile par rapport à l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A E est lié le repère mobile $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Soit (C) la trajectoire de A ; D_1 l'axe central du torseur des vitesses de E . On suppose que A est sur D_1 , que $\vec{V}_A = h \vec{\Omega}_1$, où h est une fonction positive de t et dérivable, avec $\vec{\Omega}_1 = \vec{k} + \vec{I}$.

1°) a. ~~Comme~~ Chercher les composantes de $\vec{I}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sachant qu'à l'instant $t = 0$: $\vec{I} = \vec{i}$.

b. Déterminer les composantes de $\vec{J}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sachant qu'à l'instant $t = 0$: $\vec{J} = \vec{k}$.

On pourra, par exemple, montrer que $\vec{J}$ appartient au plan déterminé par $\vec{k}$ et $\vec{u} = \vec{k} \wedge \vec{I}$, poser $\vec{J} = \vec{u} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta$ et déterminer θ , fonction dérivable de t .

2°) a. On suppose que h est strictement positif. Quel est le rôle de D_1 relativement à (C) ?

Déterminer le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion (i.e. $1/R$ & $1/T$) en fonction de t et de h , (C) étant orientée dans le sens des t croissants.

(d'après centrale 77)

PROBLEME II

Dans l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, on appelle (P) le plan xOy muni de l'orientation usuelle. (C) est une courbe de (P) , sur laquelle ont été choisies une orientation et une origine. On suppose d'autre part que (C) est rectifiable, s est son abscisse curviligne, et que si m est un point de (C) le vecteur $\frac{d^2 \vec{m}}{ds^2}$ ne s'annule pas. Soit $(\vec{t}, \vec{n})$ le repère de Frenet de (C) en m , R le rayon de courbure algébrique de (C) au point m ; la fonction $s \mapsto R$ sera considérée comme une donnée.