

Donc $F = \mathcal{C}([1,4], \mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dans $\mathbb{R}$. On considère $\varphi: F \rightarrow M_3(\mathbb{R}) : \varphi: f \mapsto A_f$ définie par $A_f = (a_{ij}^f)$ où i : colonne et j ligne avec: $a_{ij}^f = \int_1^i f(x) dx$.
On pose: $d_k(f) = a_{k+1,k}^f$ pour $k=1,2,3$ (on pourra mettre $d_k = a_{k+1,k}^f$)

I. 1°. Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}(F, M_3(\mathbb{R}))$.

2°. Montrer que: $\forall f \in F : \varphi(f) = A_f$ est antisymétrique. Calculer les coefficients a_{ij}^f en fonction des d_k .

3°. On considère les fonctions f_1, f_2 et f_3 de F définies par: $x \in [1,4]$.
 $f_1(x) = \begin{cases} x \sin(\pi x) & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}; f_2(x) = \begin{cases} x \sin(\pi x) & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}; f_3(x) = \begin{cases} x \sin(\pi x) & \text{si } x \in [3,4] \\ 0 & \text{si } x \in [1,3] \end{cases}$

Montrer que les matrices $\varphi(f_1), \varphi(f_2)$ et $\varphi(f_3)$ constituent une base de l'image $A = \text{Im } \varphi$ de φ . (On rappelle la formule d'intégration par parties: $\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$)

En déduire le rang de φ .

4°. Montrer que la fonction $g \in F : g(x) = \sin 2\pi x : g \in \text{Ker } \varphi$ est-elle injective?

5°. Calculer le déterminant de la matrice: $\varphi(F)$.

d'après M.L.1 Besançon, 72.

B Soit $a \in \mathbb{R}$.

1°. On pose: $g_a(x) = x^a e^{-1/x}$; déterminer le plus grand ensemble sur lequel on peut définir g_a . On définit: $f_a(x) = \int_0^x t^a e^{-1/t} dt$.

2°. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, g_a^{(n)}(x) = x^{a-2n} e^{-1/x} P_{a,n}(x)$ où $P_{a,n}$ est un polynôme de $d^\circ \leq n$. Calculer $P_{a,n}(x)$ pour $n=0,1,2$ et donner la relation de récurrence entre $P_{a,n}, P_{a,n-1}$ et $P_{a,n-2}$.

3°. Montrer que l'on a: $f_a(x) = x^{a+2} e^{-1/x} - (a+2) \cdot f_{a+1}(x)$ (On fera une intégration par parties).

4°. Montrer qu'il existe une suite: $(C_{a,i})_{i \in \mathbb{N}}$ tels que: $\forall k \in \mathbb{N} :$

$$f_a(x) = x^{a+2} e^{-1/x} \sum_{i=0}^k C_{a,i} x^i + C_{a,k+1} f_{a+1}(x).$$

5°. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ on a: } 0 \leq f_{a+2}(x) \leq x \cdot f_a(x)$.

6°. $h_a(x) = x^{a+2} e^{-1/x}$; est-ce que f_a et h_a sont équivalentes quand $x \rightarrow +\infty$?

- Devoir n° 1. 2° semestre.

*. On établit une relation entre $g_a''(x), g_a'(x), g_a(x)$ de la forme

$$Q_2(x) \cdot g_a''(x) + Q_1(x) \cdot g_a'(x) + Q_0(x) g_a(x) = 0 \text{ avec: } d^\circ Q_i = i \text{ et enant, on dérivera cette relation.}$$