

I. Soit a un nombre réel strictement positif, on considère la suite définie par :

$$u_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad u_n = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{a}{2u_{n-1}}$$

1°). a). Montrer que : $\forall n : u_n \cdot u_0 > 0$

b). Si $a \in \mathbb{Q}$ et si $u_0 \in \mathbb{Q}$, montrer alors que $u_n \in \mathbb{Q}$.

2°) a) Montrer les deux relations :

$$i) \quad u_n - \sqrt{a} = \frac{(u_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2u_{n-1}} \quad \text{et} \quad ii) \quad u_n + \sqrt{a} = \frac{(u_{n-1} + \sqrt{a})^2}{2u_{n-1}}$$

b) En déduire l'expression $\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ en fonction de u_0 , a et n . (On suppose que $u_0 + \sqrt{a} \neq 0$). Calculer u_n .

3°). Montrer que, pour $n \geq 1$, u_n est soit croissante soit décroissante (utiliser i et ii). En déduire que la suite u_n est convergente, étudier sa limite en fonction de u_0 .

4°) On suppose que $a > 0$ et on prend $u_0 = E(\sqrt{a})$.

On appelle $\pi = \sqrt{a} - E(\sqrt{a})$.

Montrer alors que l'on peut majorer la différence $u_n - \sqrt{a}$ par un nombre de la forme $\frac{\pi^{\alpha_n}}{(2u_0)^{\beta_n}}$.

Calculer α_n et β_n .

Application : Calculer $\sqrt{5}$ à 10^{-9} près.

($\pi < 1/4$ et $\log 2 > 0,3$).

II. Queysanne. n°150 et 293.