

I.

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , les zéros d'un polynôme  $P$ , de degré  $n$ , appartenant à  $\mathbb{C}[X]$ .

1°. Démontrer que les pôles de la fraction rationnelle  $\frac{P'}{P}$  sont tous simples et que:  $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-x_i}$ , somme où le

nombre de termes égaux à  $\frac{1}{x-x_i}$  est  $\alpha$  si  $x_i$  est zéro d'ordre  $\alpha$  de  $P$ .

Si  $a \in \mathbb{C}$  et si  $P(a) \neq 0$ , calculer:  $S_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - a}$  et  $S_2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - a)^2}$

2°. Décomposer en éléments simples la fraction:  $\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}$ .

Si  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont les zéros de  $X^4 - X + 1$ , calculer

$$S = \sum_{i=1}^4 \frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2}$$

3°. Calculer  $S$  en transformant l'équation  $x^4 - x + 1 = 0$ , qu'en penser?

## II - Fonctions à variation bornée

On dira que  $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$  est à variation bornée sur  $[a, b]$  si: pour toute subdivision  $\sigma$  de  $[a, b]$ :  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \text{où } x_0 = a, x_{n+1} = b.$$

est un ensemble majoré; soit  $V_f(a, b) = \sup(S_\sigma)$ .

1°. Montrer que toute fonction monotone croissante sur  $[a, b]$  est à variation bornée et que la différence de deux fonctions monotones croissantes est à variation bornée.

2°. On peut définir  $V_f(a, x) \in \mathcal{F}([0, b], \mathbb{R}^+)$ . Montrer que  $V_f(a, x)$  est croissante (donc à variation bornée).

3°. Montrer que  $V_{\lambda f}(a, x) = |\lambda| \cdot V_f(a, x)$  et que si  $f$  et  $g$  sont monotones croissantes, que:  $V_{f+g}(a, x) = V_f(a, x) + V_g(a, x)$

4°. Montrer que si  $x < y$ , alors,  $V_f(a, y) \leq V_f(a, x) + V_f(x, y)$ .

Montrer que l'on a aussi l'inégalité dans l'autre sens et que:  $V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y)$

5°. Montrer que:  $g(x) = V_f(a, x) - f(x)$  est monotone croissante. En déduire que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions monotones croissantes.

6°. Montrer que si  $V_f(a, b) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$ . Que peut-on en déduire pour  $f$  si  $V_f(a, b) = |f(b)|$ .

7°. Soit  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

Montrer que  $f$  n'est pas à variation bornée sur tout intervalle  $\mathbb{Q}_{\frac{1}{2}}$  de  $\mathbb{R}$  contenant 0 (on pourra considérer la suite:  $x_k = \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi/2}}$ )

Montrer pourtant que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (et même dérivable).