

Corrigé du devoir :

I : il faut vérifier tout d'abord que : $-1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ (immédiat).

Puis : $f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) \frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{3}{2(1+x^2)}$

à partir d'ici : 2 méthodes :

i) On déduit que : $f(x) = -\frac{3}{2} \operatorname{Arctg} x + C$ et en calculant $f(0)$ on trouve

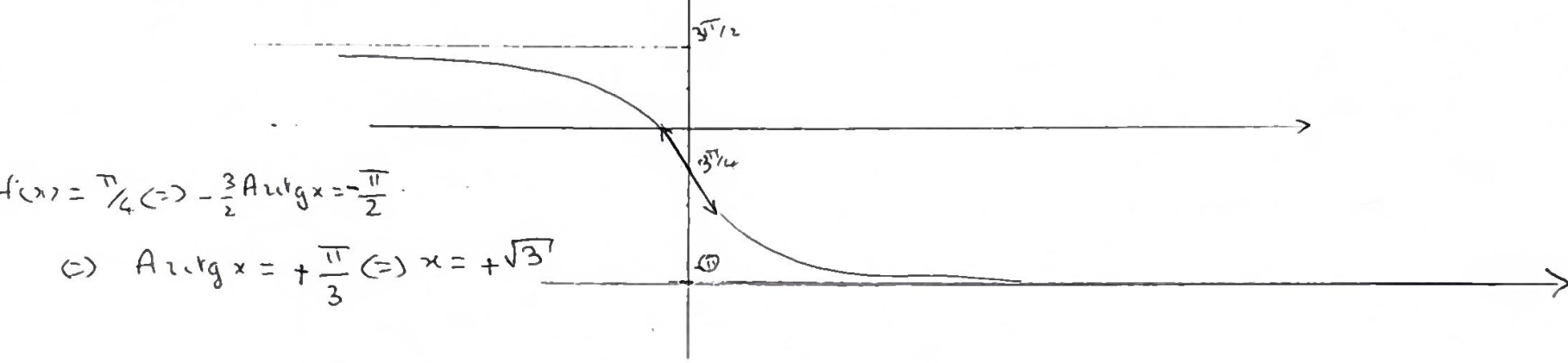
$$f(x) = -\frac{3}{2} \operatorname{Arctg} x + \frac{3\pi}{4}$$

ii) Soit $g(x) = \operatorname{Arctg}(\sqrt{1+x^2}-x)$: on pose $x = -\operatorname{rg} \theta$: $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\Rightarrow g(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$

on a $t = \operatorname{rg} \frac{\theta}{2}$: $\frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 = \operatorname{rg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)^2$ et $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow g(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} x$.

puis $h(x) = \operatorname{Arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$: on pose $x = \operatorname{rg} \theta$: $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\Rightarrow h(x) = \operatorname{Arctg}(\sin \theta) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} x$ d'où le résultat.

Rep. graphique :



II - 17. $f_2(-x) = -f_2(x)$: fonction impaire.

$x \rightarrow +\infty$: $f_2(x) = \lambda x - x \operatorname{Arctg} x + \frac{\lambda}{x} = (\lambda - \operatorname{Arctg} x) x + \frac{\lambda}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda - \operatorname{Arctg} x) = (\lambda - \frac{\pi}{2})$ d'où si $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$: $f_2(x)$ tend vers $\pm \infty$.

si $\lambda = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$: or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x} = 1$.

donc dans ce cas $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1$ d'où le

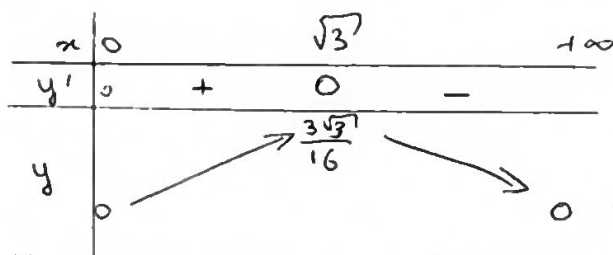
λ	$\lambda < \frac{\pi}{2}$	$\lambda = \frac{\pi}{2}$	$\lambda > \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

et lorsque x tend vers 0 : $(\lambda - \operatorname{Arctg} x) x$ tend vers 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \frac{\lambda}{x}$ ou 0 si $\lambda = 0$.

2°) $f_2'(x) = \lambda \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctg} x$

$f_2''(x) = 2 \left(\frac{\lambda}{x^3} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)$

Pour la recherche des points d'inflexion, écrivons la forme d'équation : $y = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$: $x > 0$: $y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$



D'où si $0 < \lambda < \frac{3\sqrt{3}}{16}$: il y a 2 points d'inflexion.

$\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{16}$: $f_2''(x)$ s'annule mais ne change pas de signe.

donc : $\lambda \geq \frac{3\sqrt{3}}{16}$: pas de points d'inflexion

L'ensemble des points d'inflexion est donc l'ensemble des couples (x, y) :

$\begin{cases} y = f_2(x) \\ \lambda = \frac{x^3}{(1+x^2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(0 < \lambda < \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1+x^2} - x \operatorname{Arctg} x$ pour $x > 0$ et $x \neq \sqrt{3}$.

Etude de la courbe $y' = x \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \operatorname{Arctg} x$ et en posant $x = \operatorname{rg} a$

$\Rightarrow y' = \frac{\operatorname{rg} a}{1+\operatorname{rg}^2 a} \cdot \frac{1-\operatorname{rg}^2 a}{1+\operatorname{rg}^2 a} - a = \frac{1}{4} [\sin 4a - 4a] < 0$ car $a > 0$.
(car $\sin x < x$ si $x > 0$).