

EXERCICE I : Etudier la fonction $x \mapsto y = \operatorname{Arctg}(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{Arcos} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$
(le résultat du calcul de la dérivée est très simple)

Représenter son graphique. Résoudre l'équation $y = \pi/4$.

EXERCICE II : Soit $f_\lambda(x) = \lambda \frac{x^2+1}{x} - |x| \operatorname{Arctg} x$. Ou λ est un réel positif.

1°)- Vérifier que f_λ a une particularité permettant de n'étudier que la restriction de f_λ à $\mathbb{R}^+$. On ne s'intéressera qu'à cette restriction dans la suite. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x)$. (On distinguera les différents cas)

2°)- Calculer $f'_\lambda(x)$ et $f''_\lambda(x)$. Préciser quel est suivant les valeurs de λ , le nombre de points d'inflexions de la courbe représentative de f_λ (i.e. les points où la dérivée seconde s'annule et change de signe). Former l'équation cartésienne de l'ensemble de ces points; construire la courbe représentative de cet ensemble de points (pour étudier le signe de la dérivée il est intéressant de poser $x = \operatorname{tga}$).

EXERCICE III : Soit $f: x \mapsto f(x) = \operatorname{Arctg}(x)$.

1°)- Démontrer par récurrence, que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$
 P_{n-1} étant un polynôme de degré $n-1$. On établira une relation entre P_n , P_{n-1} , P'_{n-1} et on calculera le terme de plus haut degré de P_n . Est-ce que P_n a des propriétés de parité?

2°)- Appliquer la formule de Leibniz à $(1+x^2)f'(x) = 1$ pour obtenir une relation entre 3 polynômes consécutifs P_{n-2} , P_{n-1} , P_n .

3°)- En déduire que P_n vérifie une relation de la forme :

$A(x)P''_n(x) + B(x)P'_n(x) + C(x)P_n(x) = 0$, où A , B , C sont des fonctions de x éventuellement constantes, pouvant dépendre de n .

4°)- En décomposant la fraction rationnelle $\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{C}$ donner l'expression de P_{n-1} .

5°)- Montrer de deux manières différentes (l'une en utilisant le 4°), l'autre en revenant à la définition de P_{n-1} et en utilisant le théorème de Rolle) que l'équation $P_{n-1}(x) = 0$ admet $n-1$ racines distinctes et réelles.

Idée du barème : I- 4,5 II- 7 : 1°)2 2°)5

III- 8,5 : 1°)2,5 2°)1 3°)2 4°)1 5°)2

Quelques conseils : bien lire l'énoncé et souligner les passages importants, ne pas trop s'attarder sur les questions difficiles.