

I. Soit $J \in M_3(\mathbb{C})$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\mathcal{A}$ le s.e.v. de $M_3(\mathbb{C})$ engendré par J^n pour $n \in \mathbb{N}$ ($J^0 = I_3$)

1°) Calculer J^2, J^3 puis J^n (on se servira de la congruence modulo 6).

2°) a). Montrer que I_3, J et J^2 engendrent $\mathcal{A}$.

b). Quelle est la dimension de $\mathcal{A}$?

3°) Montrer que $\mathcal{A}$ est 1 sous anneau commutatif unitaire de $M_3(\mathbb{C})$.

4°) a). Montrer que pour qu'une matrice X de $M_3(\mathbb{C})$ commute avec tout élément de $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'elle commute avec J .

b). Montrer que X commute avec les $e_i e_j^*$ de $\mathcal{A}$ si et seulement si elle appartient à $\mathcal{A}$.

5°) Soit $M = aI + bJ + cJ^2 \in \mathcal{A}$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

a). Montrer que si M est inversible, son inverse est un él. de $\mathcal{A}$.
(si M^{-1} existe, alors M^{-1} commute avec les $e_i e_j^*$ de $\mathcal{A}$).

b). Montrer que M est inversible si il existe une relation entre a, b et c que l'on précisera.

c). Déterminer M^{-1} lorsque M est inversible.

6°) On pose $E = \frac{1}{3}(I - J + J^2)$ et $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{A}; EX = XE = X\}$.

a). i). Montrer que $\mathcal{B}$ est 1 s.e.v. de $\mathcal{A}$.

ii). Déterminer la dim. de $\mathcal{B}$.

b). Calculer E^2 , puis E^n pour $n \in \mathbb{N}$.

c). Montrer que l'addition et la multiplication des matrices font de $\mathcal{B}$ un corps dont l'élément unité est E .

d'après M P 1 Reims, 1972.
(1^{ère} partie).

II - Determinants de Van der Monde (ou Vandermonde ?).

1°) Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ où $x_i \in \mathbb{R}$

a) Montrer que Δ est 1 polynôme homogène de degré $\frac{n(n-1)}{2}$.

b). Montrer que l'on peut mettre $(x_i - x_j)$ (où $i \neq j$) en facteur dans le déterminant Δ . En déduire l'expression de Δ .

2°) Pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ soit $f_k \in \mathbb{R}[X]$: $d^\circ f_k = k$ où :

$$f_k = X^k + \sum_{p=0}^{k-1} a_{k,p} X^p \quad \text{Etablir la relation:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

En déduire le calcul de : $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a_1 & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos a_{n+1} & \dots & \cos(na_{n+1}) \end{vmatrix}$