

Corrigé des devoirs

1°. On trouve facilement $a = 1$, $b = \frac{4}{15}$, $c = \frac{3}{5}$ or la dérivée est nécessairement unique.

puisque $f(x) = \frac{4}{15}x^3 + o(x^3)$; donc, comme f' et f'' admettent des racines

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^2 + o(x^2) \text{ et } f''(x) = \frac{24}{5}x + o(x) \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \text{ racine double de } f'(x) = 0 \\ 0 \text{ racine simple de } f''(x) = 0 \end{array} \Rightarrow \text{simplifications}$$

$$2^\circ f(-x) = -f(x) \text{ et } f'(x) = \frac{4x^2}{25(1+\frac{3}{5}x^2)^2(1+x^2)} = \frac{4x^2}{(5+3x^2)^2(1+x^2)}$$

$\Rightarrow$ tableau de variations:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f''(x)$	0	$+$

$$3^\circ \text{ On trouve } f''(x) = \frac{24x^2(1+\frac{13}{15}x^2)}{25(1+\frac{3}{5}x^2)^3(1+x^2)^2} = \frac{8x^2(15+13x^2)}{(5+3x^2)^3(1+x^2)^2}$$

d'où $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f''(x)$ est du signe de x .

4°. Asymptote: cherchons le D.L.G. de $f(x)$ au vois. de $+\infty$

$$\frac{\frac{4}{15}x^3 + x}{\frac{3}{5}x^2 + 1} = \frac{4}{9}x + \frac{25}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } \text{Arctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{9}x - \frac{\pi}{2} + \frac{52}{25x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \rightarrow +\infty$$

Valeurs calculées:

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,000293 \approx 2,9 \times 10^{-4}$	$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,0031 \approx 3,1 \times 10^{-3}$
$f(1) = 0,00627 \approx 6,3 \times 10^{-3}$	$f'(1) = 0,03125 \approx 3,1 \times 10^{-2}$
$f(\sqrt{3}) = 0,0663 \approx 6,6 \times 10^{-2}$	$f'(\sqrt{3}) = 0,1378 \approx 0,14$

On trouve aussi:
 $f(3) \approx 0,34$

