

1°. On a: $x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)$
 d'où $y = f \circ g(y) = a_1 (b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3) + a_2 (b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3)^2 + a_3 (b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3)^3 + o(y^3)$

lors, en vertu de l'unicité d'un D.L. $\Rightarrow$ $a_1 b_1 y = y$
 $(a_1 b_2 + a_2 b_1^2) y^2 = 0$
 et $(a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) y^3 = 0$ $\Rightarrow$ $b_1 = \frac{1}{a_1}$;
 $b_2 = \frac{a_2}{a_1^2}$; $b_3 = \frac{2 a_1^2 - a_3 a_1}{a_1^5}$

Application : $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f'(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

on utilise la méthode ci-dessus, il faut calculer $f'(x)$ de f

$f(x) = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}$

$b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -\frac{1}{3}$ et il faut calculer b_4 et b_5
 on vérifie facilement que $b_4 = 0$ et pour b_5 on a $a_1 b_5 + 3 a_3 b_1^3 b_3 + b_1^5 a_5 = 0 \Rightarrow b_5 = \frac{2}{15}$
 $\Rightarrow \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = y - \frac{y^3}{3} + \frac{2y^5}{15} + o(y^5)$

2°. A l'ordre 1 comme $f(x) = a_1 x + o(x) \Rightarrow f'(x) = a_1$ donc, y est donc nulle en 0

et $g'(0) = \frac{1}{a_1} \Rightarrow x = g(y) = \frac{1}{a_1} y + y \varepsilon_1(y)$ or : $y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$

en remplaçant x par sa valeur : $y = a_1 \left(\frac{1}{a_1} y + y \varepsilon_1(y) \right) + a_2 \left(\frac{1}{a_1} y + y \varepsilon_1(y) \right)^2 + o(y^2)$
 $\Rightarrow y = y + a_1 y \varepsilon_1(y) + \frac{a_2}{a_1^2} y^2 + o(y^2)$ (car $o(y^2) = o(x^2)$)
 $\Rightarrow \varepsilon_1(y) = -\frac{a_2}{a_1^3} y^2 + o(y^2)$

d'où $g(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + o(y^2)$: propriété vraie à l'ordre 2.
 $+ y^2 \varepsilon_2(y)$ et on repète dans $y = f(x)$

$\Rightarrow y = a_1 \left(\frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \varepsilon_2(y) \right) + a_2 \left(\frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \varepsilon_2(y) \right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \varepsilon_2(y) \right)^3 + o(y^3)$
 $\Rightarrow y = y + 0 \times y^2 + a_1 \varepsilon_2(y) - \frac{2 a_2^2}{a_1^4} y^3 + \frac{a_2}{a_1^3} y^3 + o(y^3)$ car $\varepsilon_2(y)^2 = o(y^2)$
 et même $\varepsilon_2(y)^3 = o(y^3)$
 $\Rightarrow \varepsilon_2(y) = \frac{2 a_2^2 - a_3 a_1}{a_1^4} y^3 + o(y^3)$

d'où $g(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \frac{2 a_2^2 - a_3 a_1}{a_1^4} y^3 + o(y^3)$ propriété vraie à l'ordre 3.
 $\varepsilon_3(y)$

Par récurrence on a $P_p(Q_p(y)) = y + y^{p+1} A_p(y)$ où A_p est un polynôme
 puis, en reportant $x = Q_p(y) + \varepsilon_p(y)$ dans $y = P_p(x) + o(x^{p+1})$

$y = P_p(Q_p(y) + \varepsilon_p(y)) + o(x^{p+1}) = P_p(Q_p(y) + \varepsilon_p(y)) + a_{p+1} (Q_p(y) + \varepsilon_p(y))^{p+1} + o(x^{p+1})$
 $= P_p(Q_p(y)) + a_1 \varepsilon_p(y) + a_{p+1} \frac{1}{a_1^{p+1}} y^{p+1} + o(y^{p+1})$ car $\varepsilon_p(y)^2 = o(x^{p+1}) = o(y^{p+1})$

Il suffit maintenant de calculer $A_p(0)$ et on aura $a_1 \varepsilon_p(y) = \left[-\frac{a_{p+1}}{a_1^{p+1}} - A_p(0) \right] y^{p+1} + o(y^{p+1})$
récurrence démontrée

Pour obtenir b_{p+1} , la fonction des a_q $q \leq p$, il suffit de calculer $A_p(0)$ qui
 exprime la fonction des a_q $q \leq p$

$\frac{f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x)} = \frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{6} x^3 - \frac{75}{12} x^4 + o(x^4)$ dans $f^{-1}(x) = 1 - 2x$ par exemple
 (strictement correcte dans ce cas de a)

Pour $f^{-1}(x) = 1 - 2x$: $b_1 = 1, b_2 = -\frac{3}{2}, b_3 = \frac{8}{3}, b_4 = \frac{125}{24}$