

I. Soient a et b deux constantes données telles que $0 < a < b$. On forme $a_1 = \sqrt{ab}$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$, ..., $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

1°). Montrer que l'on définit ainsi une suite (a_n) croissante et une suite (b_n) décroissante telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < b_n$.

2°). Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ on a : $a_p < b_q$. Établir que les suites a_n et b_n sont convergentes et que $\lim a_n = \lim b_n$. On ne cherche pas à l'exprimer.

3°). Montrer alors que la suite définie par $\frac{2}{c_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $\frac{2}{c_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$ a une limite.

II. On dit qu'une suite converge en moyenne vers σ si la suite (σ_n) : $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n}{n}$ a pour limite σ quand $n \rightarrow +\infty$.

1°). Montrer que si (b_n) a pour limite σ , (σ_n) converge vers σ .

2°). Montrer que (σ_n) peut être convergente alors que (b_n) diverge. (on donnera un exemple).

III. Calculer dans $K[X, Y, Z]$: $(X+Y+Z)^3 + (X-Y-Z)^3 + (Y-Z-X)^3 + (Z-X-Y)^3$ (K corps commutatif).
A quelle condition sur K obtiendra-t-on le polynôme nul ?

IV. On rappelle qu'un nbre complexe est algébrique sur $\mathbb{Q}$ si : $\exists f \in \mathbb{Q}[X] : f(x) = 0$ avec $f \neq 0$.

1°). Montrer que, pour que x soit algébrique, il faut et il suffit que le s.e.v. $V(x)$ engendré par $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ (en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$) soit de dimension finie. Soit p la dimension de $V(x)$, montrer qu'il existe une unique relation à coefficients rationnels de la forme :

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + x^p = 0.$$

On dit alors que x est algébrique de degré p .

Démontrer que $2 \cdot i\sqrt{2}$ et $1 + \sqrt[3]{2}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, quel est leur degré respectif ?

2°). x étant algébrique de degré p et y algébrique de degré q , démontrer que xy et $x+y$ sont algébriques (considérer le s.e.v. de $\mathbb{C}$ engendré par $x^h y^k$ où $0 \leq h \leq p$ et $0 \leq k \leq q$).

Démontrer que $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3}$ est algébrique.

3°). Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$.

(d'après H.G.P.).

Idée du barème :

I	6 p ^{ts}	1°). 2 ; 2°). 3 ; 3°). 1
II	5 p ^{ts}	1°). 3 ; 2°). 2
III	2 p ^{ts}	
IV	7 p ^{ts}	1°). 3 p ^{ts} ; 2°). 3 p ^{ts} ; 3°). 1