

I- Problème :

1°)- Posons $f(x) = \frac{ax + bx^3}{1 + cx^2} - \operatorname{Arctg} x$ où a, b, c désignent 3 constantes réelles, et x une variable réelle.

Déterminer a, b, c de façon que, lorsque x est infiniment petit, l'infiniment petit $f(x)$ soit d'ordre le plus élevé possible. On constatera que ce problème admet une solution unique (a, b, c appartiennent à l'ensemble $\{4/15, 3/5, 1\}$).

Quelle est, a, b, c ayant les valeurs calculées ci-dessus, la partie principale de $f(x)$ en 0 ? (On conserve pour a, b, c ces valeurs.)

2°)- Vérifier que $f(-x) = -f(x)$, puis calculer $f'(x)$ (qui se simplifie beaucoup) et déterminer son signe. Variations de f ?

3°)- Calculer $f''(x)$, résoudre l'équation $f''(x) = 0$ et déterminer le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x .

4°)- déterminer l'asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$, puis tracer soigneusement cette courbe. (On calculera les valeurs de f et f' pour $x = \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$)

(d'après E.N.S.A.E. 76)

II- Problème : l'objet de ce problème est de montrer que si une fonction f définie au voisinage de 0 vérifie H_n :

i) f admet un D.L. à l'ordre n ; ii) f est strictement monotone au voisinage de 0, nulle en 0 ; iii) $f(x) = a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ avec $a_1 \neq 0$. alors, $g = f^{-1}$ la fonction réciproque définie dans un voisinage de 0 admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0.

1°)- Si $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ et $g(y) = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + o(y^3)$ où $g = f^{-1}$ calculer b_1, b_2, b_3 en fonction de a_1, a_2, a_3 .

(Utiliser le fait que si $y = f(x)$ alors $o(y) = o(x)$ et de même $o(x^3) = o(y^3)$ puis que $y = f \circ g(y)$ et enfin utiliser les D.L. composés.)

Application : si $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$, exprimer f^{-1} , calculer le D.L. de f^{-1} à l'ordre 3, puis à l'ordre 5 en utilisant la méthode ci-dessus.

2°)- Montrer par récurrence sur p , que si f vérifie H_p alors $g = f^{-1}$ admet un D.L. à l'ordre p : étudier d'abord les cas où $p = 1, p = 2, p = 3$; écrire $y = f(x) = P_p(x) + o(x^p)$ puis $x = g(y) = Q_p(y) + \xi_p(y)$ puis reporter dans $y = f(x)$ pour en déduire que $\xi_p(y)$ s'écrit de la façon suivante $\xi_p(y) = b_p y^p + o(y^p)$.

Donner alors une méthode pour obtenir les coefficients b_p en fonction des coefficients $a_q : q \leq p$.

Application : D.L. de f^{-1} à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour $f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}$

Idée du barème : I : 8 1°) 2 ; 2°) 2 ; 3°) 2 ; 4°) 2

II : 1°) 5,5 ; 2°) 6,5

N.B. : dans les deux problèmes, les premières questions sont très importantes pour la suite, aussi est-il conseillé de les rédiger avec beaucoup de soin.