

Corrigé du devoir surveillé.

I. 1°. On a immédiatement: $x_2 = -y_1 + 2y_2$; puis

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2y_1 - 3y_2 & (1) \\ 3x_1 + 2x_4 = 6y_1 - 12y_2 - y_3 & (2) \\ 8x_3 + x_4 = 4y_1 - 8y_2 + y_4 & (3) \end{cases}$$

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} -22 & 60 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 11 & 1 & -1 \\ 36 & -96 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$



On fait (1)-(3) puis $2x(1)-(2) \Rightarrow x_3$ puis x_4 et enfin x_1 , et c'est en calculant x_1 que l'on prouve que M_1 est inversible.

2°. On a: $M_2^2 = 4I_4 \Rightarrow M_2^{-1} = \frac{1}{4} M_2$.

II. 1°. Les vecteurs colonnes de CL sont tous proportionnels

$\Rightarrow \text{rg} = 1$

$$CL = \begin{pmatrix} c_1 e_1 & c_1 e_2 & \dots & c_1 e_n \\ c_2 e_1 & c_2 e_2 & \dots & c_2 e_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n e_1 & c_n e_2 & \dots & c_n e_n \end{pmatrix}$$

$$(CL)^2 = (e_1 c_1 + \dots + e_n c_n) CL = (LC) \cdot CL$$

$$\Rightarrow (I + CL)(I + LC) = I + [L(I + LC) + I] \cdot CL \text{ donc, } I + CL$$

est inversible si $LC \neq -1$ et dans ce cas, on a: $(I + CL)^{-1} = I - \frac{1}{1+LC} CL$.

2°. On pose $C' = M^{-1}C \Rightarrow N = M(I + C'L)$; donc N est inversible si le nombre $LC' \neq -1 \Leftrightarrow LM^{-1}C \neq -1$.

Dans ce cas, on a: $N^{-1} = (I + C'L)^{-1} M^{-1} = \left(I - \frac{1}{1+LC'} C'L \right) M^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{1+LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1}$

3°. $N_1 - M_1 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & -0,01 & -0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0,01 \ 0 \ -0,01 \ -0,02)$; $LM^{-1}C = -0,9$.

puis: $M^{-1}CLM^{-1} = \begin{pmatrix} 19,8 & -53,02 & -4,4 & 50,6 \\ 0,9 & -2,41 & -0,2 & 0,23 \\ 3,6 & -9,64 & -0,8 & 0,92 \\ -32,4 & 86,76 & 7,2 & -8,28 \end{pmatrix}$ on en déduit: $N_1^{-1} = \begin{pmatrix} -220 & 590,2 & 49 & -566 \\ -10 & 26,1 & 2 & -23 \\ -40 & 107,4 & 9 & -10,2 \\ 360 & -963,6 & -80 & 91,8 \end{pmatrix}$

On remarque que $N_1 \simeq M_1$, mais que $N_1^{-1} \simeq 10 \cdot M_1^{-1}$; donc, pas de conclusions relatives!

4°. On doit avoir: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{96}$ et: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \beta \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta = 3$.

Pour M_1 , on voit que la valeur trouvée est très proche de la valeur initiale; par conséquent, dans les applications numériques, une matrice sera "plus ou moins bien inversible" suivant la valeur de son déterminant

III - 1°.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} AB = C \Rightarrow c_{ke} = \sum_{j=1}^p a_{kj} b_{je} \quad k \in [1, m] \text{ et } e \in [1, q]$$

$$\Rightarrow |c_{ke}| \leq \sum_{j=1}^p |a_{kj}| \cdot |b_{je}| \leq \sum_{j=1}^p \varphi(A) \cdot \varphi(B) = p \cdot \varphi(A) \cdot \varphi(B)$$

Cette condition ne peut être améliorée; en effet, si tous les éléments de A sont égaux ainsi que tous les éléments de B , alors $\varphi(AB) = p \cdot \varphi(A) \varphi(B)$.

On a, ensuite: $\varphi(\lambda A) = |\lambda| \cdot \varphi(A)$.