

2°). On a: $\varphi(LM^{-1}C) \leq n \cdot \varphi(L) \cdot \varphi(M^{-1}C) \leq n^2 \varphi(L) \varphi(M^{-1}) \varphi(C) \leq n^2 \varepsilon \cdot \varphi(M^{-1}) < 1$

or: $LM^{-1}C$ est un réel $\Rightarrow |LM^{-1}C| = \varphi(LM^{-1}C) < 1 \Rightarrow LM^{-1}C \neq -1$

donc, la matrice N est bien inversible, en vertu du II. 2°).

3°). On a: $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ or: $\sup_{i \in [1, n]} |a_{i1}| \leq \sup_{(i,j) \in [1, n]^2} |a_{ij}|$ donc: $\varphi(M^{-1}C) \leq \varphi(M^{-1})$.

et en faisant la même chose qu'au 2°: $\varphi(LM^{-1}C) \leq n \cdot \varphi(L) \cdot \varphi(M^{-1}C) \leq n \cdot \varepsilon \cdot \varphi(M^{-1}) < 1$

donc: $LM^{-1}C \neq -1$.

$$n \cdot \varepsilon < \frac{1}{\varphi(M^{-1})}$$

Si: $N_2 = M_2 + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L = (-1 -1 -1 -1) \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors: $\varepsilon = 1$.

$$\varphi(M_2^{-1}) = \frac{1}{4} \quad n = 4 \quad \text{et: ici: } \varepsilon = \frac{1}{n \cdot \varphi(M^{-1})} \text{ avec } N_2 \text{ non inversible.}$$

Donc, on ne peut trouver une meilleure condition sur ε

(permettant d'avoir ε éventuellement plus grand) pour que N soit inversible.

Modifications subies par l'inverse de N :

d'après le II 2°, $N^{-1} - M^{-1} = -\frac{1}{1 + LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1}$, donc, il faut majorer:

$$\varphi\left(\frac{1}{1 + LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1}\right) \text{ or: } \varphi(M^{-1}CLM^{-1}) \leq n \varphi(M^{-1}C) \cdot \varphi(LM^{-1}) \leq n^2 \varepsilon \cdot \varphi(M^{-1})^2$$

$$\text{et } 1 + LM^{-1}C \geq 1 - \varphi(LM^{-1}C) \geq 1 - n \cdot \varepsilon \cdot \varphi(M^{-1})$$

$$\text{d'où la majoration demandée: } \leq \frac{n^2 \varepsilon \varphi(M^{-1})^2}{1 - n \varepsilon \varphi(M^{-1})}$$

4°). a). $\varepsilon = 10^{-3}$, M_2 : $\varphi(M_2^{-1}) = \frac{1}{4}$ d'où la majoration: $\approx 10^{-3}$.

b). $\varphi(M_1^{-1}) = 96$ et dans ce cas: la majoration nous donne: $\approx 240 \dots$

Exercice complémentaire:

$$D_n = \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & & 0 \\ x-1 & x^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x+1 \\ & & & & x^2 \\ & & & & & x-1 \\ & & & & & & x^2 \end{vmatrix}$$

a). En développant par rapport à la 1^{ère} ligne, on trouve:

$$D_n = x^2 D_{n-1} - (x+1) \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & x-1 & x^2 \end{vmatrix}$$

puis en développant ce dernier déterminant par rapport à la 1^{ère} colonne, on en déduit:

$$D_n = x^2 D_{n-1} - (x^2 - 1) D_{n-2}$$

b). Equation récurrente: $x^2 - x^2 x + (x^2 - 1) = 0$: 2 racines: 1 et $x^2 - 1$.

$$\Rightarrow D_n = \alpha + \beta (x^2 - 1)^n \quad D_1 = x^2 \quad D_0 = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{x^2 - 2}, \quad \beta = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

$$\text{d'où: } D_n = \frac{(x^2 - 1)^{n+1} - 1}{x^2 - 2} = 1 + (x^2 - 1) + \dots + (x^2 - 1)^n$$

(la 2^{ème} expression est valable même si $x^2 = 2$).