

I. Soit la fonction : $f_\alpha(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x^\alpha}$ où $x \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- 1°. Etudier, selon les valeurs de α , $f_\alpha(x)$ et $f'_\alpha(x)$ quand $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$.
- 2°. Etudier le signe de $f'_\alpha(x)$; établir les tableaux de variation de $f_\alpha(x)$ dans les différents cas trouvés; indiquer l'allure des courbes représentatives C_α de $y = f_\alpha(x)$.
- 3°. Toutes les courbes C_α ont un point commun, A dont on déterminera les coordonnées; calculer à 10^{-2} près l'ordonnée de A.
- 4°. Déterminer la courbe l_α , lieu des points où les courbes C_α ont, éventuellement, une tangente parallèle à $x'x$.
- 5°. Lorsqu'il existe un nombre x_0 tel que $f'_\alpha(x_0) = 0$, établir, selon les valeurs de α , la place de x_0 par rapport à 1 (on aura à étudier la fonction $g: x \rightarrow \frac{x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$).
- 6°. Lorsque C_α est tangente à $y'x$ en 0, montrer que l'équation $f'_\alpha(x) = x \operatorname{sh} 1$ a une solution x_1 , différente de 1, sauf dans un cas; préciser selon les valeurs de α la place de x_1 par rapport à 1.
- 7°. Dans le cas où $0 < \alpha < 1$, étudier, selon les valeurs de α et de u_0 , la suite définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{\operatorname{sh} u_n}{u_n^\alpha \operatorname{sh} 1}$.
(on utilisera les résultats de la question précédente).

N.B.: Les questions du I sont étroitement liées.

d'après: Ecole Navale 1964.

II. On considère l'espace vectoriel E des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et l'application de E dans E qui, à la fonction $y(x)$ fait correspondre la fonction : $z(x) = \int_0^x t \cdot y(t) dt$.

- 1°. Montrer que cette application est linéaire, que les transformées $z(x)$ ont une dérivée $z'(x)$ continue, que $z(0) = z'(0) = 0$ et qu'enfin : $z'(x)$ admet pour la valeur 0 de la variable une dérivée $z''(0)$ égale à $y(0)$.