

I. On trouve : $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{2 + \sqrt{3+2x-x^2}}{2 - \sqrt{3+2x-x^2}} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3+2x-x^2}{1-x^2}}}{1 - \sqrt{\frac{3+2x-x^2}{1-x^2}}} \right| + C$
 (en posant $x-1 = 2t$) (avec $y = t(x+1)$)

et : $\int g(x) dx = -\frac{1}{2 \sin x} - \frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} + C$

II. 1° En faisant deux intégrations par parties, on trouve : $I_n = \pi - \frac{\pi^2}{(n+3)(n+4)} I_{n+2}$

2° $I_0 = \frac{4}{\pi}$ $I_1 = \frac{6}{\pi}$ $I_2 = \frac{12}{\pi} - \frac{48}{\pi^3}$

3° $x^n \sin \pi x$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, positive et non identiquement nulle, donc $I_n > 0$. $I_{n+2} > 0 \Rightarrow I_n < \pi$, c.q.d.

4° $\pi - I_n = \frac{\pi^2}{(n+3)(n+4)} I_{n+2}$ or : $0 < I_{n+2} < \pi$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi - I_n) = 0$

5° Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+2} = \pi \Rightarrow \pi - I_n \sim \frac{\pi^3}{n^2} \Rightarrow A = \pi, B = 0, C = -\pi^3$

2ème étape : on a : $I_{n+2} = \pi - \frac{\pi^3}{(n+2)^2} + \frac{\varepsilon}{(n+2)^2} = \pi - \frac{\pi^3}{n^2} + \frac{\varepsilon_1}{n^2}$

d'où : $\pi - I_n = \frac{\pi^2}{(n+3)(n+4)} \left[\pi - \frac{\pi^3}{n^2} + \frac{\varepsilon_1}{n^2} \right]$ or : $\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{7}{n} + \frac{37}{n^2} + \frac{\varepsilon_2}{n^2} \right]$

$\Rightarrow \pi - I_n = \frac{\pi^2}{n^2} \left(\pi - \frac{7\pi}{n} + \frac{37\pi - \pi^3}{n^2} + \frac{\varepsilon_3}{n^2} \right)$

et enfin : $I_n = \pi - \frac{\pi^3}{n^2} + \frac{7\pi^3}{n^3} + \frac{\pi^3(\pi^2 - 37)}{n^4} + \frac{\gamma}{n^4}$

III. 1° $F(x) = \int_{-1/2}^x f(t) dt \Rightarrow F(1/2) = c_0(f)$ d'où, en faisant une intégration par parties, on trouve : $c_k(f) = \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} c_0(f) - \frac{1}{k+1} c_{k+1}(f)$

Si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \Rightarrow \int_{-1/2}^{+1/2} P(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k c_k(f)$

2° a).

On remarque que, si $t \in [-h, +h]$

$\phi_n(t) \geq 1$

b). On a facilement :

$-h < t < h : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = +\infty$

$t = \pm h : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 1$

$t > h$ ou $t < -h : \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 0$

