

2°) c). $u_n(t) \geq 0$; pour $h < a < 1-h \Rightarrow [h, +h] \subset [a-1, a]$

$$\text{donc: } \int_{a-1}^a u_n(t) dt \geq \int_{-h}^{+h} u_n(t) dt \geq \int_{-h/2}^{+h/2} u_n(t) dt$$

or, pour $t \in [-h/2, +h/2] \Rightarrow \phi_h(t) \geq \phi_h(h/2) = h > 1$

donc: $\int_{-h/2}^{+h/2} u_n(t) dt \geq h \cdot h^n$ et cette dernière quantité tend vers l'infini avec n , donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

d). Soit m_1 la borne inférieure de g sur $[a-1, a]$ (m_1 peut être négatif) et $m_1 \leq m \Rightarrow m_1 - m \leq 0 \Rightarrow (m_1 - m) u_n(t) \geq m_1 - m$ si $|t| \geq h$ (en vertu du b).

$$\begin{aligned} \text{donc: } \int_{a-1}^a g(t) u_n(t) dt &= \underbrace{\int_{a-1}^a m_1 u_n(t) dt}_{m_1 \cdot \omega_n} + \underbrace{\int_{-h}^h (g(t) - m_1) u_n(t) dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{a-1}^{a-h} (g(t) - m_1) u_n(t) dt}_{\geq (m_1 - m)(1-h-a)} + \underbrace{\int_h^a (g(t) - m_1) u_n(t) dt}_{\geq (m_1 - m)(a-h)} \\ &\geq m_1 \cdot \omega_n + (m_1 - m)(1-2h) \text{ quantité qui tend vers } +\infty \\ \text{donc: } \int_{a-1}^a g(t) u_n(t) dt &\text{ est strictement positive dès que } n \text{ est assez grand.} \end{aligned}$$

3°) a). prenons $a = \frac{1}{2}$, si $f(0) \neq 0$, on peut supposer $f(0) > 0 : c = f(0)$, alors, $\exists h : \forall x \in [-h, +h] f(x) \geq \frac{1}{2} c > 0$.

donc, en vertu du 2°) d), $\int_{a-1}^a f(t) u_n(t) dt$ est strictement positif dès que n est assez grand; or: $u_n(t)$ est un polynôme, par conséquent, grâce au 1°) $\exists h : c_h(f) \neq 0$.

b). Considérons l'intégrale: $\int_{-1/2}^{+1/2} f(t) [\phi_h(t - \pi_0)]^n dt = \int_{-1/2 - \pi_0}^{+1/2 - \pi_0} f(x + \pi_0) [\phi_h(x)]^n dx$.

$a = \frac{1}{2} - \pi_0 > 0$. $g(x) = f(x + \pi_0)$, alors, $g(0) \neq 0$.

on choisit h pour que: $h < \frac{1}{2} - \pi_0$ et $1-h > \frac{1}{2} - \pi_0$ et en utilisant le

2°) d), on en déduit que pour n assez grand: $\int_{-1/2}^{+1/2} f(t) [\phi_h(t - \pi_0)]^n dt$ est non nul.

Or: $[\phi_h(t - \pi_0)]^n$ est un polynôme donc, $\exists h : c_h(f) \neq 0$.

Si $\pi_0 = \frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, comme f est continue en π_0 , on pourra se ramener au cas ci-dessus.

Si $f \neq g \Rightarrow \exists \pi_0 : (f-g)(\pi_0) \neq 0 \Rightarrow \exists h : c_h(f-g) \neq 0 \Rightarrow c_h(f) \neq c_h(g)$

donc, l'application est bien injective.