

HX 5.

1°/ On considère les intégrales $J_n(d) = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+dx)}} dx$ où $d \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Ces intégrales n'ont de sens que si d appartient à un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$. Quel est ce sous-ensemble? n étant fixé, on désignera dans toute la suite du problème par J_n l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $d \rightarrow J_n(d)$ et par K_n, H_n, L_n les restrictions de J_n aux intervalles $[0, +\infty[$; $]-1, 0[$ et $]-1, +1[$ respectivement.

Calculer $J_0(0)$ et $J_0(1)$.

2°/ Exprimer $K_0(d)$ et $K_1(d)$ au moyen de fonctions élémentaires de d . Démontrer que $K_0(d)$ et $K_1(d)$ sont continues à droite du point $d = 0$.

(On pourra, si nécessaire, démontrer et utiliser la formule :

$$d \geq 0 \quad \text{Arcsin} \frac{d-1}{d+1} = -\frac{\pi}{2} + 2 \text{Arctg} \sqrt{d}.)$$

3°/ On suppose que $d \rightarrow +\infty$: quelle est la partie principale de $K_0(d)$ et $K_1(d)$ quand on prend $\frac{1}{d}$ comme infiniment petit principal?

4°/ En intégrant entre 0 et 1 la dérivée par rapport à x de $\frac{x^p}{\sqrt{(1-x)(1+dx)}}$ trouver une relation de récurrence entre $K_{p-2}(d)$, $K_p(d)$ et $K_{p+2}(d)$. Calculer $K_n(0)$ et $K_n(1)$.

5°/ Montrer que $K_n(d)$ peut se mettre sous la forme :

$$K_n(d) = R_n\left(\frac{1}{d}\right) + S_n\left(\frac{1}{d}\right) J_0(d) \quad \text{où } R_n(u) \text{ et } S_n(u) \text{ sont}$$

deux polynômes en u de degré n .

Calculer les termes de plus bas degré de ces polynômes. En déduire la partie principale de $K_n(d)$ lorsque $d \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{d}$ étant pris comme infiniment petit principal.

Montrer que la limite de $\sqrt{d} \cdot K_n(d)$ est $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

(on commencera par étudier le cas $n=0$).

6°/ Exprimer $H_0(d)$ au moyen des fonctions élémentaires de d .

(M.G.P. Laitiers. 1965. Paris.)