

I- Exercice :

Calculer les primitives de $f(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{3+2x-x^2}}$ et $g(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x}$

II- Problème :

Soit n un entier naturel, on pose $I_n = (n+1)(n+2) \int_0^{\pi} x^n \sin nx \, dx$.

1°) Etablir une formule permettant de calculer I_{n+2} en fonction de I_n .

2°) Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

3°) Démontrer que, quel que soit n , $0 < I_n < \pi$.

4°) Exprimer $\pi - I_n$ en fonction de I_{n+2} et n . En déduire la limite de I_n si n tend vers l'infini.

5°) On se propose d'obtenir, en prenant $1/n$ comme variable, un développement limité d'ordre 4 de I_n lorsque n tend vers l'infini. On peut pour cela exploiter les résultats du 4° en procédant par étapes :

Première étape : déterminer 3 réels A, B, C tels que :

$$I_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3}$$

Deuxième étape : déterminer C et D tels que :

$$I_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{E}{n^4} + \frac{F}{n^5}$$

et φ étant 2 fonctions de qui tendent vers 0.

(d'après E.N.I. travaux ruraux)

III- Problème :

Soit C l'ensemble des fonctions continues sur $[-1/2, 1/2]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On définit $c_k(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)x^k dx$ où k est un entier naturel.

1°) Soit f un élément de C et F une primitive de f : $F(-1/2) = 0$.

Calculer $c_k(F)$ en fonction des $c_i(f)$ pour $i \leq k+1$.

Si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, montrer que $\int_{-1/2}^{1/2} f(x)P(x) dx$ s'exprime en fonction des $c_k(f)$.

2°) Soit $h \in [0, 1/2]$ et $a \in [h, 1-h]$, on définit pour $t \in [-1, +1]$ $\Phi_h(t) = \frac{1-t^2}{1-h^2}$

a)-Etudier rapidement Φ_h et tracer sa courbe représentative.

b)-Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$ pour $t \in [-1, 1]$ avec $u_n(t) = [\Phi_h(t)]^n$.

c)-Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ avec : $v_n = \int_{a-1}^a [\Phi_h(t)]^n dt$.

(ne pas chercher une primitive de $u_n(t)$)

d)-Soit g une fonction continue sur $[a-1, a]$ minorée par $m > 0$ sur $[a-1, a]$. Montrer que $\int_{a-1}^a g(t) [\Phi_h(t)]^n dt$ est strictement positive dès que n est assez grande.

3°) a) Montrer que si $f \in C$ et $f(0) \neq 0$, les $c_k(f)$ ne sont pas tous nuls. (On pourra étudier l'intégrale $\int_{a-1}^a f(x) [\Phi_h(x)]^n dx$ pour une valeur convenable de h)

b) Montrer que si $f \in C$ n'est pas nulle pour un x_0 de $] -1/2, 1/2[$ les $c_k(f)$ ne sont pas tous nuls.

En déduire que l'application $f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ est injective.

Idée du barème : I : II 7 1°) 1 2°) 1 3°) 1 4°) 0,5 5°) 3,5

III : 1°) 0,5 2°) 5 3°) 3,5