

1° a) si on pose $f(x) = \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+x^2)^n}$, alors : $f(0)=0$ et on a : $f(x) \sim \frac{1}{x^{2n}}$ d'où on a convergence si $n > \frac{1}{2}$.

b) $R(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{(t^2+x^2)^n} dt$ après une intégration par parties.

et si $n \neq 1$: $\frac{1}{(x^2+t^2)^n} = \frac{1}{(x^2+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{(x^2+t^2)^n} \Rightarrow R(x) = \frac{\pi}{2n(x^2+x^2)}$ (1)

si $n=1$, on trouve $R(1) = \frac{\pi}{8}$ donc, (1) nous donne la valeur de $R(x)$ pour $n > 0$.

Pour $x < 0$, on remarque que R est paire, donc : $R(x) = R(-x) = \frac{\pi}{2n(1-x^2)}$.

2° a) si $x > 0$, on a bien : $\operatorname{Arctg} x > 0$.

Puis, en étudiant la variation de $g(x) = x - \operatorname{Arctg} x$, on en déduit : $x > \operatorname{Arctg} x$.

Donc : $g(x) > 0$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{t} dt > \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x}$.

d'où : immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b) si $0 < t \leq 1$ alors $\operatorname{Arctg} \frac{1}{t} > \frac{\pi}{4}$, donc : $\int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2} dt > \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{t dt}{t^2+x^2}$

or : $g(x) > \int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2} dt > \frac{\pi}{8} \log \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ $\frac{\pi}{8} \log \frac{x^2+1}{x^2}$

3° $g'(x) = -\frac{\pi}{2(1+x^2)x} \Rightarrow g(x) = \frac{\pi}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C$ or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Comme g est paire on en déduit donc : $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \log(1+\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \log(1-\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Equivalent de g en 0 : $g(x) \sim -\frac{\pi}{2} \log|x|$.

et en $\pm \infty$: $g(x) \sim \frac{\pi}{2|x|}$.

II. 1° R est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

si $x > 0$, on trouve : $R'(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)(1-x)^2} (2x^2-x+1) > 0$; si $x < 0$: $R'(x) = \frac{\pi(2x^2-x+1)}{2x(1-x)^2} < 0$

d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$R'(x)$	-	+	+	+
$R(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	0

on remarque que : $\exists x_0 \in]0, 1[: R(x_0) = 0$.
 $x_0 \approx 0,308233705$

2° Par continuité, on pose : $R(0) = 0$.

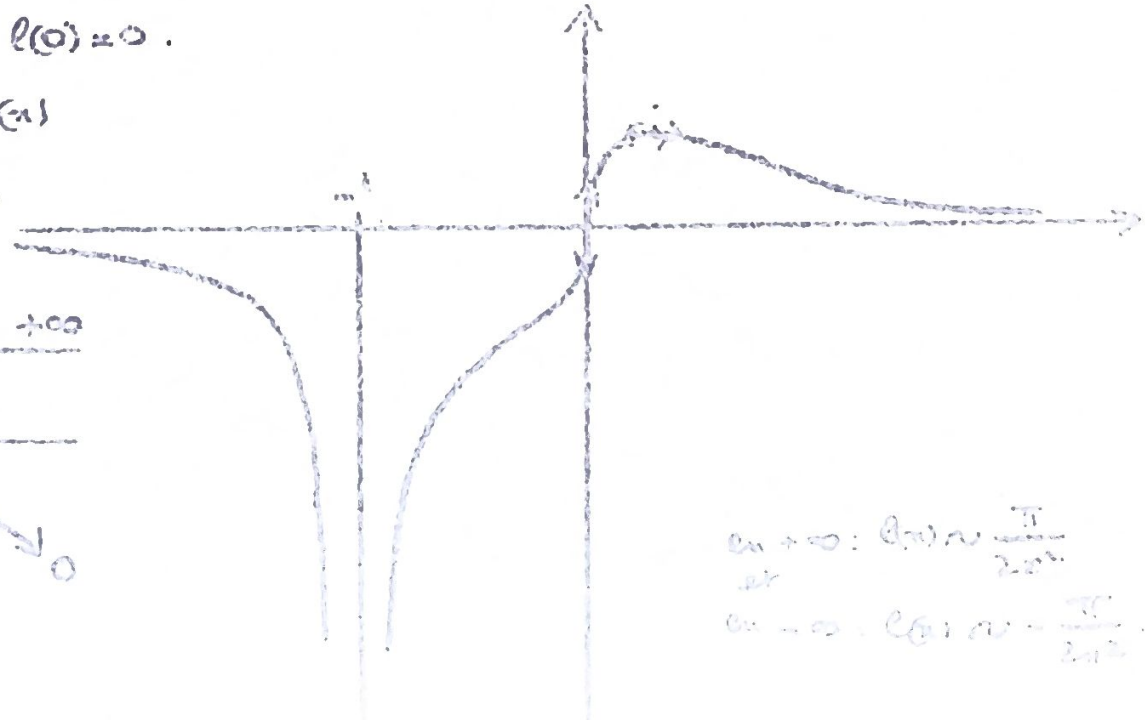
si $x > 0$, on a : $R'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3} R(x)$

si $x < 0$: $R'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3} R(x) \Rightarrow$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	0	x_0	$+\infty$
$R'(x)$	-	+	+	0	-
$R(x)$	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0

$R(x) \approx 0,41$



en $+\infty$: $R(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$
 et
 en $-\infty$: $R(x) \sim -\frac{\pi}{2x^2}$