

II. 47. a). Répondre au cours.

b). $\int_0^t f(u) \cos u \, du \leq \sqrt{\int_0^t u^2 \, du} \cdot \sqrt{\int_0^t f^2(u) \, du} \leq \sqrt{\frac{t^3}{6}} \cdot \sqrt{\int_0^t f^2(u) \, du} \leq A$

donc, cette intégrale est bornée, on en déduit l'existence de $\int_0^{+\infty} f(u) \cos u \, du$

D'autre part, on sait que : $\left| \int_0^{+\infty} u \cos u \, du \right| \leq \int_0^{+\infty} |u \cos u| \, du \leq A$ et en passant aux limites, on a bien l'inégalité demandée.

c). $B(u, v)$ est bilinéaire, symétrique, positive, montrons qu'elle est définie.

Si $\exists x_0 : u(x) \neq 0$ $\Rightarrow u(x)$ est continue, non nulle donc, pour $t > x_0$,

$\int_0^t u^2(x) \, dx > 0$, on $\int_0^{+\infty} u^2(x) \, dx > \int_0^t u^2(x) \, dx > 0$ q.e.d.

B est préhilbertien car c'est l.e.v. de dim. infinie sur lequel on définit une forme $B(u, v)$ bilinéaire, symétrique, positive et non dégénérée.

2°) a) si $\alpha > 3/4$, alors, $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+x^2)^{\alpha}} \, dt$ existe, donc, en vertu du b), J_α existe

et $J_\alpha(\infty)^2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+x^2)^{2\alpha}} \, dt \cdot \int_0^{+\infty} f(t)^2 \, dt$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \, dt}{(t^2+x^2)^2} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dr}{t^2+x^2} = \pi^2 \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dr}{(t^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4x}$ d'où : $J_\alpha(\infty)^2 \leq \frac{\pi}{4x} \cdot f \# f$.

c) $|J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x)| = \left| \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \left(\frac{1}{t^2+(x+h)^2} - \frac{1}{t^2+x^2} \right) \, dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{t \cdot f(t)}{t^2+x^2} \cdot \frac{-h(2x+h)}{t^2+(x+h)^2} \, dt \right|$
 $\leq |h(2x+h)| \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t \cdot |f(t)|}{t^2+x^2} \cdot \frac{1}{t^2+(x+h)^2} \, dt$

on : $x+h > \pi/2 \Rightarrow t^2+(x+h)^2 > \frac{x^2}{4}$
 $\Rightarrow \frac{1}{t^2+(x+h)^2} < \frac{4}{x^2} \Rightarrow |J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x)| < \frac{4|h(2x+h)|}{x^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t \cdot |f(t)|}{t^2+x^2} \, dt$

$x > 0$, on pourra toujours choisir $\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}$

et donc : $\lim_{h \rightarrow 0} |J_\alpha(x+h) - J_\alpha(x)| = 0 \Rightarrow J$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Comme J est paire, on en déduit que J est continue sur $\mathbb{R}^{**}$.

3°) Il faut montrer que J est continue en 0 :

on : $J(x)^2 h = \frac{1}{h(x+h)^4} \cdot x^2 J_\alpha(\infty)^2 \leq \frac{\pi^2 x}{4(x+h)^4} \cdot f \# f \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} J(x)^2 = 0 \Rightarrow J$ continue en 0.

Comme : $\int_0^{+\infty} \frac{\pi x}{4(x+h)^4} \, dx$ existe, on en déduit que $J \in L^2$.

et $\int_0^{+\infty} J(x)^2 \, dx \leq \frac{\pi}{4} \cdot f \# f \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{(x+h)^4} = \frac{\pi}{24} \cdot f \# f$.