

I. 1°. $a \in \mathbb{R}$, Trouver toutes les fonctions réelles $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que
 $dw = f(y) [2xy dx + (y^2 - x^2 - a^2) dy]$ soit la différentielle totale
 d'une fonction $w(x, y)$ que l'on déterminera.

2°. Dans 1 repère orthonormé Oxy , on se donne sur Oy le pt A
 d'ordonnée $a > 0$. Trouver toutes les courbes C telles que : si la
 tangente à l'une d'elles en l'un de ses points M coupe Ox en T , on
 ait $MT = TA$. (on pourra poser : $y = u^2$).

3°. Déterminer toutes les courbes C' telles que) chacune d'elles
 coupe orthogonalement toute les courbes C .

4°. Ecrire l'équation cartésienne E du lieu géométrique Γ des
 points communs à une courbe C et à une courbe C' lorsque celles-ci
 ont un centre et lorsque la droite qui joint les centres varie en
 restant parallèle à la droite d'équation $y = x$.

5°. x et y voisins de 0 étant liés par l'équation E , déterminer
 le développement limité de la fonction $x \mapsto y(x)$ à l'ordre 5
 au voisinage de 0. (on remarquera que y est impaire).

d'après H G P Toulouse 1965.

II. C_a désigne la courbe définie paramétriquement en fonction de
 t par les équations : $x = \frac{1}{t(t^2-1)}$; $y = \frac{t(t-a)}{t^2-1}$ où $a \in \mathbb{R}$, t réel.

1°. Montrer que les courbes C_a et C_{-a} se déduisent l'une de l'autre
 par une transformation géométrique simple faisant intervenir C_0 .

2°. Déterminer une relation entre t_1, t_2 , et t_3 (faisant intervenir les fonctions
 symétriques) exprimant 1 CNS pour que les pts de C_a de paramètres
 t_1 et t_3 soient alignés. Montrer que la tangente au point $M(t)$ recoupe
 C_a en un point dont on déterminera la valeur du paramètre en
 fonction de t . Pour quelles valeurs de a existe-t-il des droites coupant
 C_a en trois pts confondus (pts d'inflexion)?

3°. Etudier les branches infinies de C_a et la position de de la courbe
 par rapport à ses asymptotes suivant les valeurs de a ; pour cela, on
 déterminera l'ordre auquel il convient d'effectuer les développements
 limités généralisés (on pourra poser $t = \varepsilon + u$ où $\varepsilon = \pm 1$). Pour quelle
 valeur du paramètre les asymptotes sont-elles coupées par la courbe?
 Lieu du point d'intersection des asymptotes de C_a lorsque a varie.

4°. Etudier les points doubles des courbes C_a ; exprimer leurs
 coordonnées en fonction de a .

5°. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la courbe C_a admet un
 point où le vecteur dérivé première est nul. Etudier, en effectuant le
 minimum de calcul, la nature des pts correspondants.
 Construire celle de ces courbes qui correspond à $a > 0$